

ERFAHRUNGEN DER SCHÜLER NUTZEN

Wie können Schüler dazu angeregt werden ihre eigenen Fragenstellungen zu entwickeln und diese weiterzuverfolgen?

Handouts für Lehrer

Inhalt

1. Zu erforschende Phänomene	2
2. Der Modellierungsprozess.....	3
3. Zu erforschende Photographien.....	5
4. Eine Schule mit Flaschen in Honduras aufbauen	8
5. Eine Schule mit Flaschen aufbauen: Der Modellierungsprozess.....	10
6. Ein möglicher Unterrichtsverlauf	13

1. Zu erforschende Phänomene

Die rollenden Becher

Schaut euch diese zwei Becher an.

Stellt euch vor, dass sie über den Fußboden rollen.

- Sammelt einige Fragen, die euch dabei in den Sinn kommen.
„Werden die Becher in eine ... rollen?“
„Wie kann ich ... vorhersehen?“
„Was würde passieren, wenn ...?“
- Stellt einige Vermutungen auf. Diese können in etwa so beginnen:
„ Wenn man diese Form des Bechers nimmt, dann passiert ...“
„ Wenn man den Becher zu stark rollt, dann ...“
- Nun führt ein Experiment durch und seht, was dabei rauskommt.
Kannst du deine Hypothesen *erklären* und *beweisen*?

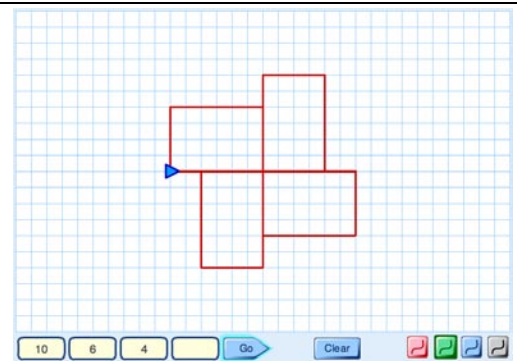


Spirolaterals?

Gebe einige Zahlen in die *Spirolaterals*- Maschine ein.

Drücke "Go" und siehe, was geschieht.

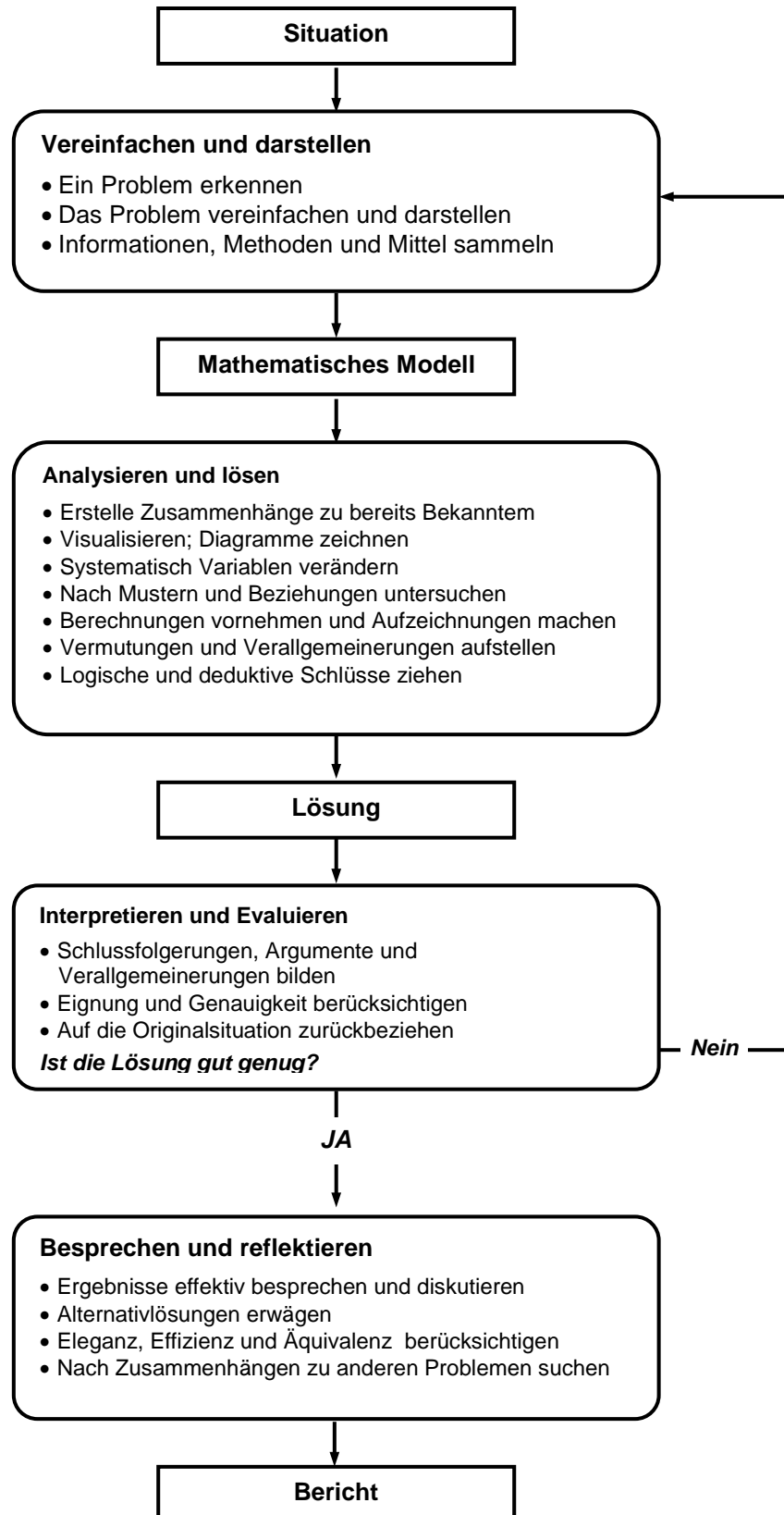
- Wie kontrollieren die Nummern das, was auf dem Bildschirm dargestellt ist?
- Sammel einige Fragen, die du klären möchtest.
Diese können etwa so beginnen:
"Wie können wir den PC dazu bringen ... zu malen?"
"Was wird geschehen, wenn wir ...?"
Probiere es aus und beantworte deine eigenen Fragen!
- Stelle einige Hypothesen auf. Diese können in etwa so beginnen:
" Wenn man drei Zahlen verwendet, dann ..."
" Wenn man eine Zahl wiederholt, dann ..."
" Wenn man die Reihenfolge der Zahlen ändert, dann ..."
Kannst du deine Hypothesen *erklären* und *beweisen*?

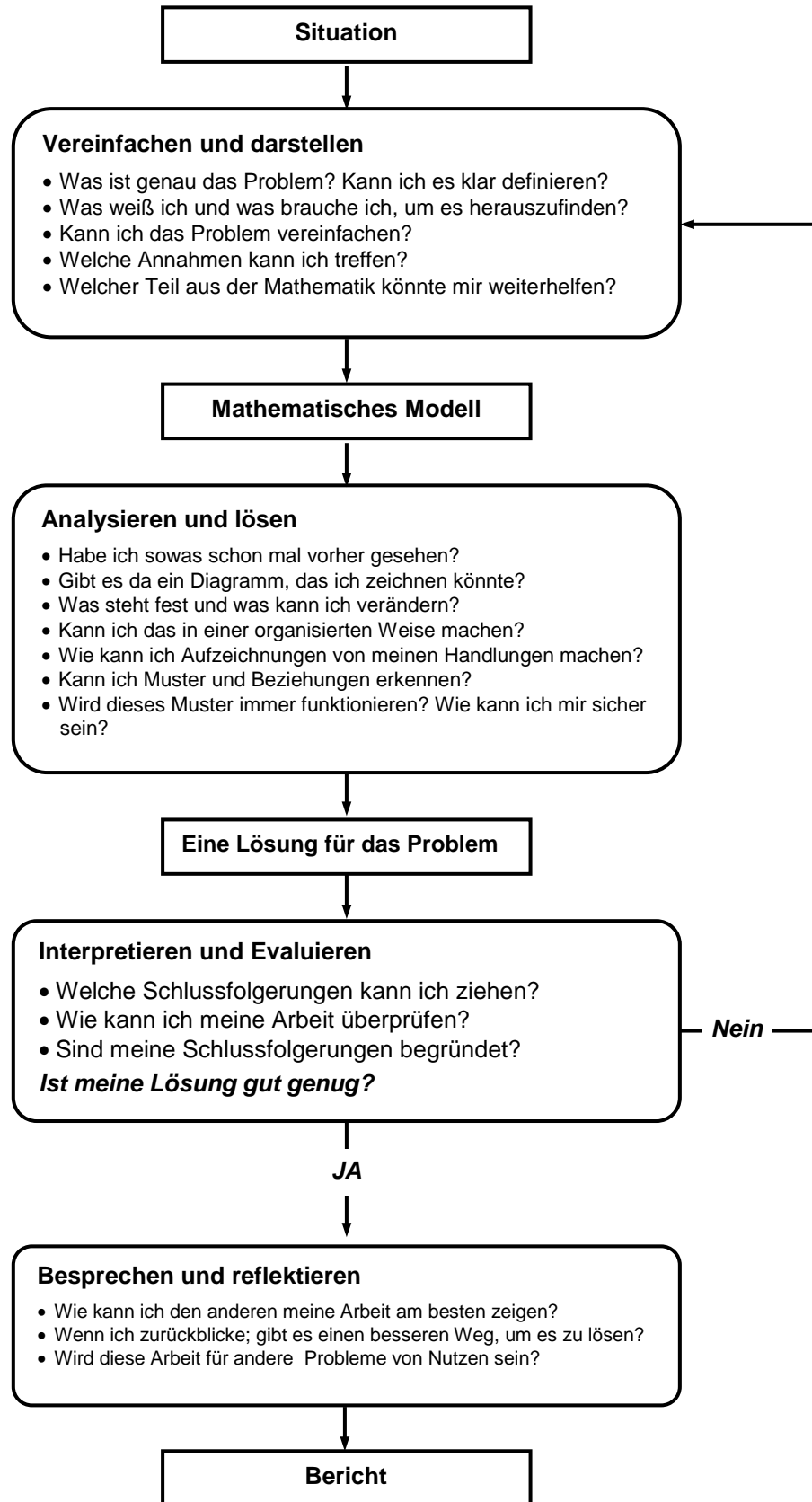


2. Der Modellierungsprozess

Die schmalen Kästchen repräsentieren Stadien des Modellierungsprozesses.

Die breiten Kästchen beschreiben die Tätigkeiten, die sich zu den jeweiligen Stadien gehören.





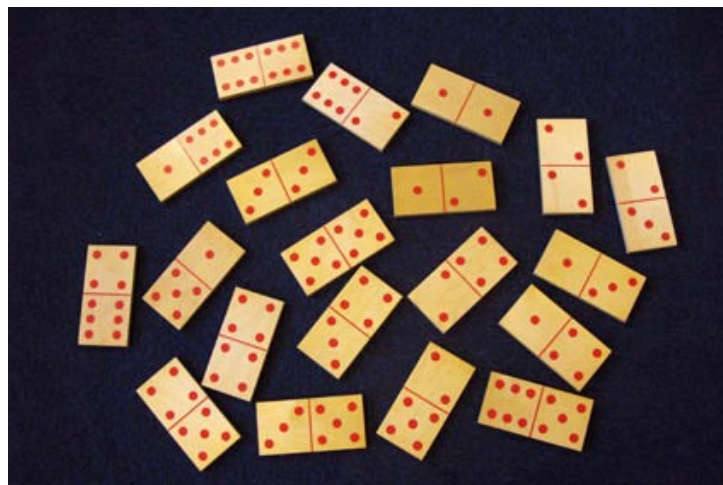
3. Zu erforschende Photographien

Schau dir im Folgenden jedes Bild an und für jedes einzelne:

- Erstelle eine Liste mit Dingen, die dir auffallen.
- Schreibe einige Fragen auf, die dir in den Sinn kommen. Sie können zum Beispiel so beginnen:
Wie kann ich ... beschreiben?
Wie viele...?
Was würde geschehen, wenn ich ... verändern würde?

Nun wendet etwas Mathematik auf den Bildern basierend an!

Dominos



Kalender



Stapel Fässer



Ein Bürgersteig in Deutschland



Dreirad mit viereckigen Rädern



Russische Puppen



Diese Bilder wurden von Malcolm Swan aufgenommen.

Weitere Bilder, die für mathematische Diskussionen bedacht sind, können auf der folgenden Seite von Richard Phillips erhalten werden: <http://www.problempictures.co.uk/>

4. Eine Schule mit Flaschen in Honduras aufbauen

Schau dir die Bilder an und:

- Erstelle eine Liste mit Dingen, die dir auffallen.
- Schreibe einige mathematische Probleme auf, die dir in den Sinn kommen.
- Nun versuche ein Problem zu lösen!

Zunächst sammeln wir alte Plastikflaschen...



und füllen sie mit Sand auf.



und erstellen ein Fundament mit Steinen...



und fangen an zu bauen...



und bauen...



und bauen...



bauen Fenster ein...



und verputzen die Wände.



Das Gebäude steht in Honduras und ist jetzt ein Zentrum für ein Programm zur Ausbildung von Schulabgängern, das entwickelt wurde, um junge Leute auszubilden und zu motivieren ihren Gemeinden zu helfen und die Armut zu senken. Das Programm ist vor allem dafür entwickelt worden, um den Schülern zu helfen eine Problemlösekapazität zu entwickeln.

Bilder mit freundlicher Genehmigung von:
Bayán Asociación de Desarrollo Socio-Económico Indígena, La Ceiba, Honduras.

5. Eine Schule mit Flaschen aufbauen: Der Modellierungsprozess

Im Folgenden erläutern wir den Modellierungsprozess; bezogen auf die Flaschensituation.

(i) Vereinfachen und darstellen

Zunächst ermitteln wir einige Problemstellungen, die gefragt werden können:

- Wie viele Flaschen benötige ich für so ein Gebäude?
- Wie groß sind das Gebäude und der Mensch?
- Wie passen die Flaschen zusammen?
- Wie viel Sand brauchen wir, um die Flaschen zu füllen?
- Was ist mit dem Mörtel dazwischen?
- Wie funktioniert das mit den Ecken?
- Was ist mit Türen und Fenstern?
- Was ist mit dem Dach?

Wir werden uns auf einen praktischen Ansatz konzentrieren.

Wie viele Flaschen benötige ich für so ein Gebäude?

Um die Situation zu vereinfachen, nehmen wir zunächst einmal an, dass es 4 Wände gibt (wie angenommen an den Winkeln oben im Bild), alles in derselben Größe und es gibt keine Fenster! Wir würden die Berechnungen vereinfachen, wenn wir auch annehmen würden, dass die Anzahl der Flaschen, die man benötigt nicht groß anders wären als wenn sie quadratmäßig gestapelt werden. Wie z.B.

Eher so... als so...

Wir werden diese Vermutungen im zweiten Prozesskreislauf abändern.

(ii) Analysieren und lösen

Zähle die Flaschen, die in einer Reihe stehen.

Schätze, wie viele Reihen es gibt. (man kann sie nicht alle sehen)

Das Produkt daraus ist ungefähr die Anzahl an Flaschen.

Zähle für 4 Wände zusammen – angenommen die Wände sind gleichgroß.

Es sind 25 Flaschen in einer Reihe.

Wir können nur die oberen 7 Reihen deutlich erkennen und zählen; diese entsprechen in etwa $\frac{1}{3}$ Höhe.

Also schätzen wir, dass da etwa $3 \times 7 \sim 20$ Reihen sind.

Also besteht die Wand aus etwa $25 \times 20 \sim 500$ Flaschen.

Angenommen die 4 Wände sind gleichgroß, dann wären es $4 \times 500 = 2000$ Flaschen.

(iii) Interpretieren und Evaluieren

Das hier ist gut genug, um den Modellierungsprozess zu veranschaulichen (und einfach zu berichten) aber (und das ist der Grund, warum das ein Modellierungskreislauf ist) wenn wir das Problem wirklich verstehen wollen, **müssten wir die Lösung verbessern, indem wir einen Schritt zurückgehen und die anderen Fragen, die oben aufgelistet sind, beantworten.**

Mögliche Verfeinerungen beinhalten zum Beispiel:

- Wie groß sind diese Flaschen? (Können wir einen Menschen als Vergleich herannehmen?)
- Wie viel Sand bräuchten wir?
(Z.B., für 2000 1-Liter Flaschen brauchen 2-3 Tonnen; warum?)
- ...und selbstverständlich müssten wir einen geeigneten Plan für das Gebäude erstellen.

(i) Vereinfachen und darstellen

Wir könnten das Stapeln der Flaschen auf andere Weisen repräsentieren. Zum Beispiel, indem wir sie enger stapeln wie auf Abbildung A (ohne Mörtel) oder Abbildung B (mit Mörtel).

Kein Mörtel:

Ein wenig Mörtel zwischen den Reihen:

(ii) Analysieren und lösen

Wenn es kein Mörtel gäbe, würde die Länge der längsten Reihe genauso groß sein wie der Durchmesser der Flasche multipliziert mit der Anzahl der Flaschen in einer Reihe. Die Höhe zwischen den Reihen wäre die Höhe der gleichseitigen Dreiecke in der Abbildung. Dies kann man entweder mit dem Pythagoras ausrechnen oder einfach durch die Vermessung eines Modells aus 3 Flaschen!

Höhe zwischen den Reihen = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{Durchmesser}$

Also wäre die Einsparung der Lücken durch das enge Stapeln (im Vergleich zu dem viereckigen Stapeln) 13%, obwohl an den Enden jeder Reihe größere Lücken sind.

Mit Mörtel scheint die Größe zwischen den Reihen ungefähr so groß zu sein wie der Durchmesser jeder Flasche. Folglich können wir annehmen, dass eine Wand ungefähr genauso hoch wäre wie der Durchmesser der Flasche multipliziert mit der Anzahl an Reihen.

Beide Modelle verringern die Anzahl der Flaschen die man benötigt um 1 jede 2. Reihe.

Die Anzahl der Flaschen, die man für jede Wand benötigt, können in einer Tabelle gezählt und repräsentiert werden:

Anzahl der Reihen der Flaschen (r)	6	9	15	21	27	33	39
	5	8	13	18	23	28	33
	4	6	10	14	18	22	26
	3	5	8	11	14	17	20
	2	3	5	7	9	11	13
	1	2	3	4	5	6	7
			2	3	4	5	6

Anzahl der Flaschen in der längsten Reihe (n)

Wenn wir, wie zuvor, annehmen, dass in der längsten Reihe 25 Flaschen sind und es 20 Reihen gibt, dann würde diese Anordnung nur 10 Flaschen weniger beziehungsweise 490 Flaschen für jede Wand benötigt.

Für 4 Wände ergibt das 1960 Flaschen – nur 2 % weniger als unsere vorherige Schätzung!

(iii) Interpretieren und evaluieren

Diese Analyse bestätigt, dass unsere vorherige Schätzung ziemlich gut gewesen ist. Die folgende Untersuchung findet algebraisch statt, ein Ansatz, der die allgemeine Struktur des Problems aufzeigt. Dieser wird jenseits der Fähigkeiten vieler Studenten sein aber er veranschaulicht hier den Prozess der analytischen Modellierung anhand einer einfachen Situation.

(i) Vereinfachen und darstellen

Wie viele Flaschen brauche ich, um ein rechteckiges Gebäude aus Flaschen zu errichten?

Überlege und liste die Variablen auf:

- Höhe der Wand h
- Breite der Wand w
- Durchmesser einer Flasche d
- Anzahl in einer Reihe n
- Anzahl der Reihen r
- Anzahl an Wänden W
- Gesamtanzahl der Flaschen T

Wir werden jede Wand von 1 bis 4 markieren.

Nun **erstellen** wir **Beziehungen** zwischen den Variablen:

- (Gesamtanzahl der Flaschen in allen 4 Wänden)
- etc. (Angenommen alle Wände sind gleich groß, also r gleich)
- (Angenommen Reihen haben den Abstand d)
- etc. (Angenommen Wände haben unterschiedliche Breite)

(ii) Analysieren und lösen

Wir können einige neue Gleichungen erstellen, in dem wir diese kombinieren:

- — —
-
- (P= Gesamtumfang des Hauses)
- (A= Gesamtfläche der Wände)

(iii) Interpretieren und evaluieren

Wir können die benötigte Anzahl der Flaschen aus den letzten zwei Gleichungen schätzen. Die letztere setzt nicht voraus, dass keine Türen und Fenster vorhanden sind. Sie legt einfach dar, dass jede Flasche einen Wandbereich besetzt, der so groß ist wie das Quadrat seines Durchmessers. Vielleicht hätten wir diese einfache Beziehung zu Beginn sehen müssen.

6. Ein möglicher Unterrichtsverlauf

Die folgenden Vorschläge beschreiben einen möglichen Ansatz, die Fotos mit Schülern zu verwenden. Dieser Ansatz beabsichtigt ihnen den Modellierungsprozess vorzustellen. Die angegebenen Zeiten sind ungefähre Angaben. Dieser Unterricht könnte in der Praxis durchaus 2 Unterrichtsstunden decken!

Einführung der Situation; dann die Schüler bitten Probleme zu benennen 5 Minuten

Das Ziel der heutigen Stunde ist es zu sehen, ob du mithilfe der Mathematik eine Situation analysieren kannst. Am Anfang wirst du denken, dass die Situation nichts mit Mathematik oder Naturwissenschaft zu tun hat. Ich möchte herausfinden, ob du kreativ sein kannst und Wege findest die Dinge anzuwenden, die du in der Schule gelernt hast.

Führen Sie die Situationen sorgfältig und anschaulich ein. Verwenden Sie dazu eine PowerPoint Präsentation, wenn möglich in Verbindung mit einem Smartboard.

Diese Fotos sind in Honduras aufgenommen worden. Sie zeigen einige Menschen die eine Schule aus alten 1-Liter Plastikflaschen bauen. Sie füllen diese zunächst mit Sand und verwenden sie als Ziegelsteine. Das ist ein toller Weg, um Abfallstoffe wiederzuverwenden! Welche Fragen fallen euch zu dieser Situation ein?

Geben Sie den Schülern zwei Minuten Zeit, um sich Problemsituationen zu notieren, die ihnen in den Sinn kommen. Sammeln Sie die Ideen dann an der Tafel. Beispielsweise:

*Wie viele Flaschen (oder wie viel Sand) braucht man, um eine Wand zu errichten?
Wie viele Flaschen braucht man, um das ganze Gebäude zu bauen?
Wie sieht das mit den Ecken aus?*

Fragen Sie die Schüler, welche Problemsituationen mithilfe der Mathematik gelöst werden können. Danach soll sich jede Gruppe eine dieser Problemsituationen aussuchen, um daran zu arbeiten.

Vereinfachung und Darstellung des Problems 10 Minuten

Erklären Sie, dass es manchmal zu kompliziert ist, Situationen aus ihrem Anfangszustand aus zu analysieren. Deswegen müssen diese vereinfacht werden, bevor sie mit Mathematik in Verbindung gebracht werden können. Mathematisches Denken erfordert fast immer diesen Prozess.

Wie können wir beginnen an dem Problem zu arbeiten? Können wir an einem einfacheren Problem arbeiten? Welche Mittel könnten uns dabei helfen über das Problem nachzudenken? Würde uns rechteckiges Papier, isometrisches Papier, ein Maßband oder ein Lineal weiterhelfen? Welche Diagramme könnten uns weiterhelfen?

Zeigen Sie die vorhandenen Mittel um an der Problemsituation zu arbeiten. Legen Sie diese gegebenenfalls im Klassenzimmer bereit, sodass die Schüler selbst entscheiden können, ob sie diese benutzen wollen oder nicht.

Geben Sie den Schülern 10 Minuten Zeit, um zu überlegen, wie sie an das Problem herangehen wollen.

Ok jetzt gebe ich euch 10 Minuten Zeit, um zu zweit an der Aufgabe zu arbeiten. Danach werde ich einige von euch nach vorne rufen, um über die verschiedenen Ansätze, die ihr verwendet, zu diskutieren.

Besprechung der Schülerideen 10 Minuten

Bitte Sie die Schüler ihre verwendeten Methoden und Aufzeichnungen zu beschreiben. Zum Beispiel:

"Wir vereinfachen das Problem, indem wir auf kleinere Wände schauen, um dann irgendwie die benötigten Flaschen zu zählen. Die schwarzen Kleckse sind die Flaschen.

Das Diagramm zeigt, dass man 13 Flaschen braucht, wenn es 5 Flaschenreihen gibt und die längste Reihe 3 Flaschen hat."

Natürlich können die Schüler verschiedenste Weisen zur Vereinfachung verwenden, von denen einige hilfreicher sind als andere. Nehmen Sie sich ein wenig Zeit, um die jeweiligen Vor- und Nachteile zu diskutieren, soweit diese Vereinfachungen klar sind.

Analyse und Lösung des Problems 20 Minuten

Geben Sie den Schülern Zeit, um zu zweit an den Problemsituationen zu arbeiten. Bieten Sie Hilfestellungen an, in dem Sie umhergehen und allgemeine Strategien offenlegen. Beispielsweise:

Lass dir Zeit, keine Eile.

Was weißt du?

Was versuchst du herauszufinden?

Bitte nicht zu schnell um Hilfe – versucht es selbst herauszufinden.

Stellen Sie denjenigen, die Schwierigkeiten haben passende Fragen aus dem Handout 2:

Wo hast du schon mal so etwas in der Art vorher gesehen?

Es nimmt zu viel Zeit in Anspruch, wenn man das Diagramm jedes Mal aufzeichnet. Kann man eine einfachere Repräsentation verwenden?

Was bleibt so? Was wirst du ändern? Kannst du da systematisch vorgehen?

Kannst du irgendwelche Muster oder Beziehungen sehen? Kannst du sie erklären?

Wie kannst du das, was du machst, festhalten?

Kannst du mir erklären wie man von diesem auf diesen Schritt kommt?

Führen Sie diejenigen, die Fortschritte machen in Richtung Interpretation und Evaluation:

Was hast du bisher herausgefunden?

Überzeuge mich davon, dass deine Lösung gut ist.

*Wie genau ist deine Antwort? Ist es genau genug?
Kannst du einen anderen Weg finden, der andere Wege aufzeigt, das Problem zu betrachten?*

Schüler besprechen und reflektieren ihre verschiedenen Ansätze. 10 Minuten

Rufen Sie einige Gruppen nach vorne, wenn die Mehrheit der Schüler bedeutenden Fortschritt mit ihrem Problem gemacht hat, um ihre Ideen den anderen vorzustellen. Es ist nicht schlimm, wenn einige noch keine Schlussfolgerungen getroffen haben. Sie können trotzdem ihre Ansätze und Ideen mit den anderen teilen.

Hören wir jetzt auf und ihr tragt einige eurer verschiedenen Ansätze, die ihr verwendet habt, vor und überlegen dann, was an Mathematik hilfreich oder nicht so hilfreich für jeden Ansatz gewesen ist. Da nicht alle fertig geworden sind, möchte ich nicht eure Antworten wissen, sondern nur eure Begründungen.

Erzählt uns von:

- *Problem, das ihr gelöst habt;*
- *Wie ihr das Problem als mathematisches Modell repräsentiert habt;*
- *Wie ihr euer Modell analysiert, um Lösungen zu erhalten;*
- *Irgendwelche Schlussfolgerungen, die ihr bisher erreicht habt. Machen eure Lösungen Sinn?*

Wir haben uns dazu entschieden herauszufinden, wie viele Flaschen man benötigt, um das Gebäude zu errichten. Wir haben die Flaschen in einer Reihe gezählt, dann die Anzahl der Reihen – aber das konnte man nicht so gut erkennen. Dann haben wir diese Zahlen miteinander multipliziert. Dann haben wir gesagt, dass es 4 Wände gibt, hoffentlich in derselben Größe. Danach begannen wir uns Gedanken über die Türen und Fenster zu machen....

Wenn die Schüler ihre Ideen vorstellen, bitten Sie die anderen Schüler Vor- und Nachteile für jeden der Ansätze zu nennen. Wenn eine Erklärung richtig klingt, aber schlecht ausgedrückt wurde, versuchen Sie:

*Kannst du das bitte wiederholen?
Du scheinst eine gute Idee zu haben aber ich möchte, dass du diese so klar wie möglich erklärst.
Klare Kommunikation ist wichtig in der Mathematik.*

Besprechung der Prozesse der Schüler 5 Minuten

Führen Sie die Schüler zu einer vereinfachten Version des Modellierungsprozesses und besprechen Sie den Prozess, den sie durchgemacht haben. Versuchen Sie die Schüler bewusster für den Wert der Modellierung zu machen.

*Die Anwendung der Mathematik und der Naturwissenschaft erfordert all diese Prozesse. Es geht nicht nur darum einfache Methoden zu lernen wie zum Beispiel Bruchzahlen zu addieren! Es geht auch darum sich Alltagssituationen zu betrachten, diese zu vereinfachen und zu analysieren, um sie besser zu verstehen.
Das ist die Arbeit der professionellen Mathematiker und Naturwissenschaftler.*