FOGALOMTANULÁS

Bevezetés

Ez a modul azzal foglalkozik, hogy a matematikai és természettudományos fogalmak tanulását hogyan lehet beintegrálni a kutatáslapú tanulásba. Gyakran ugyanis különválik két dolog: a tartalmi elemet adatok és készségek gyűjteményének tekintjük, amelyeket utánzással és gyakorlással sajátítunk el, viszont emellett tanítunk olyan procedurális készségeket a kutatásalapú tanulás keretében, amelyek nem válnak integrált részévé a tananyagnak. A tartalmi és a procedurális tudáselemek integrálása számos kihívást tartogat számunkra.

A következő procedurális tudáselemekre összpontosítunk itt: megfigyelés és vizualizálás, osztályba sorolás és definíciók alkotása, reprezentációk megalkotása és köztük az átjárhatóság biztosítása, kapcsolatok és összefüggések, becslés, mérés és számszerűsítés, értékelés, kísérletezés és változók kontrollálása. Ahogyan arra például Millar (1994) is rámutat, ezek olyan erőforrásaink, amelyek születésünktől fejlődnek. Bizonyos mértékig tudattalan a használatuk. Amikor azonban ezeket az erőforrásokat a tanár elkezdi fejleszteni, hogy ezzel segítsen a tanulóknak a matematikai és természettudományi fogalmak megértésében, a tanulók sokkal aktívabb résztvevőivé válnak saját tanulási folyamataiknak.

Ez a modul számos feladatot és tevékenységet tartalmaz – túl sokat ahhoz, hogy egyszerre átvegyük. Tekintsük ezt egy étlapnak, melyről a trénerek válogathatnak. Fontos azonban, hogy a résztvevők legalább néhány feladatot kipróbáljanak, beépítsék azokat saját órai tevékenységükbe, és később megvitassák a tapasztalatokat.

Tartalom

Acknowledgement:
The modules have been compiled for PRIMAS from professional development materials developed by the Shell Centre team at the Centre for Research in Mathematics Education, University of Nottingham. This includes material adapted from *Improving Learning in Mathematics* © Crown Copyright (UK) 2005 by kind permission of the Learning and Skill Improvement Service www.LSIS.org.uk.

A: MEGFIGYELÉS ÉS VIZUALIZÁLÁS

A szükséges idő - 30 perc

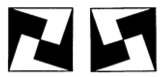
A megfigyelés és vizualizálás születésünktől kezdve az emberi lét meghatározó folyamatai. A megfigyelés alapvetően a közvetlenül látható dolgokra vonatkozik, a vizualizálás pedig arra, amit el tudunk képzelni, és mentálisan át tudunk alakítani az elménkben. Azért fontos itt ezeket említeni, mert az iskolában gyakran elhanyagolt folyamatokról van szó, részben azért, mert nem használunk olyan feladatokat, amelyek a megoldásukhoz valóban igénylik a megfigyelést és vizualizálást.

Az itt közölt feladatok csupán példát szolgáltatnak arra, hogyan lehetne kihasználni a tanulók megfigyelési és vizualizációs képességeit. Könnyen találhatók további példák, bármilyen nehézségi szinten. A bal oldali oszlopban a feladat általános leírását találjuk, a jobb oldalon pedig a konkrét példákat. Ezek rövid leírása itt lent megtalálható.

- Az **1-es Handout** néhány feladatát dolgozzuk föl.
- Mondjuk el egymásnak a megfigyeléseinket és a mentális képeket:
  - hogyan *láttuk* másképpen a dolgokat?
  - mi ragadta meg a figyelmünket?
  - mi az, amit megpróbáltunk fejben átalakítani?
- Próbáljuk ki valamelyik feladatot a saját osztályunkban! Találjunk ki további példákat, amelyekben a tanulóknak körültekintően meg kell valamit figyelniük, és ami beszélgetést indít el a megfigyelt dolgokról.

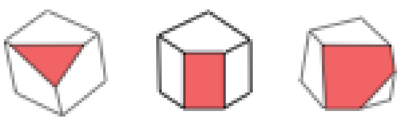
Alhambra

Az Alhambra mozaik egy bonyolult, ismétlődő mintázat, ami több különböző alakból áll össze. Megkérhetjük a résztvevőket arra, hogy próbálják lerajzolni az egyes mozaikokat, amiből a bonyolult minta fölépül. Két kis mozaik már elegendő is, ahogyan itt jobbra látható.
Kialakítható-e a minta egyetlen mozaiklap ismétlődésével?



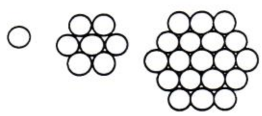
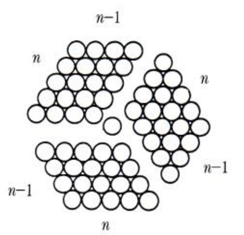
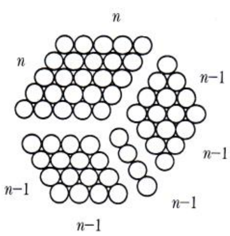
Sajtkocka

Kérjük meg a résztvevőket, hogy írjanak le minden alakzatot, amit a sajtvágás közben „látnak”. Kezdetben egy kis háromszöget látunk, de ez bármilyen lehet, a kés dőlésszögétől függően. Ahogy nagyobb és nagyobb darabokat vágunk le, meglepő lehet, de mindenféle négyszöget, ötszöget és hatszöget fogunk látni. Érdemes vázlatrajzokat készíteni, és azt alakítani, miközben beszélgetnek az alakzatokról. A rajzok készítése előtt azonban hangsúlyozzuk a fejben végzett „látás” jelentőségét.



Függőhíd kábelei

Különböző látásmódok különböző sorozatokhoz és algebrai kifejezésekhez vezetnek:

			Az ábrát akár két köbszám különbségeként is láthatjuk:
1, 7, 19, ...	$3n(n-1)+1$	$n^2+2(n-1)^2+(n-1)$	$n^3-(n-1)^3$

Handout 1: Observing and visualising activities

Describing what you see

Show the class a poster or object and ask them to decribe what they can see as accurately as they can.

Sit two students back to back and give one of them a simple geometric design. As this person to describe the design so that the second person can reproduce it accurately.

Alhambra pattern

This tiling pattern may be found in the Alhambra palace in Granada, Spain.

- How would you describe this pattern to someone who cannot see it?
- Describe how individual tiles may have been constructed.

Visualising

Ask students to shut their eyes and imagine a situation in which something is changing. Ask them to describe what they 'see'.

Cube of cheese

Imagine you have a cube of cheese and a knife. Imagine you cut off one small corner of the cheese. What shape do you get?

Imagine cutting more and more parallel slices off the cheese. How will your triangle change? What shapes will be revealed? Keep going until there is no cheese left! Now change the angle of your knife....

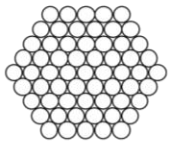
Looking for structure

Give students a problem that encourages them to look for different structures within a context.
Ask them to use their structures to make generalisations.

In the example shown, they may be asked:

- In what different ways can you count the cables?
- Can you *see* the diagram in different ways?
  - Can you see it as composed of parallellograms or triangles ?
  - Can you see a 3 dimensional shape ?

Suspension bridge cables



When making a cable for a suspension bridge, many strands are assembled into a hexagonal formation and then 'compacted' together. This diagram illustrates a 'size 5' cable made up of 61 strands. How many strands are needed for a size 10 cable?
How many for a cable that is size n?

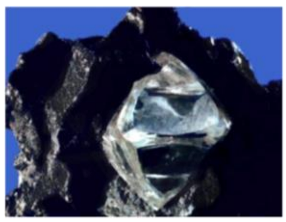
The *Alhambra pattern* task and the *Suspension bridge cables* task are both taken from Swan and Crust (1993) *Mathematics Programmes of Study, Inset for Key Stages 3 and 4*, National Curriculum Council, York.

Looking for structure

Ask students to draw or make a model of a structure that they can see.

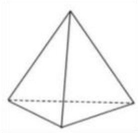
For example, they could use matchsticks, modelling clay and polythene film to make a model of this diamond crystal structure.

Diamond crystal in matrix

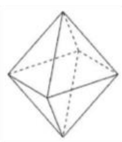


Look at this image of a diamond in its matrix rock.
What structure does it appear to have?

Tetrahedron



Octahedron



Carbon bonding in a diamond

B: OSZTÁLYBA SOROLÁS ÉS DEFINIÁLÁS

A szükséges idő - 30 perc

Az osztályba sorolás és a definiálás vitathatatlanul fontos szerepet játszik a matematikában és a természettudományokban. Itt mi nem csupán azzal foglalkozunk, hogyan lehet megtanulni a mások által létrehozott osztályba sorolást és definiálást, hanem maguk a tanulók is részt vesznek az alkotó folyamatban, megértve így, honnan származnak a matematikai és természettudományos fogalmak. Ezekben a feladatokban a tanulók dolgok egy halmazát vizsgálják meg alaposan, különböző tulajdonságok szempontjából. A tanulók kiválasztanak egy dolgot, megállapítják a különbséget közte és a többi hasonló dolog között (miben hasonlít? miben más?) és kategóriákat hoznak létre, amelyekre definíció épül. Ez segít abban a tanulóknak, hogy értsék, mit jelentenek különböző kifejezések és szimbólumok, és azok milyen folyamat eredményeként születnek meg.

- A **2-es Handout** feladatai közül választunk.
- Az osztályteremben általában milyen dolgok osztályba sorolását és definiálást kérjük a tanulóktól?
- Találjunk ki valamelyik feladattípusra épülő foglalkozást a saját osztályunk számára! Olyan feladatokat keressünk, amelyekben a tanulók figyelmesen megvizsgálhatják a dolgok tulajdonságait, és megvitathatják a definíciókat.
- Próbáljuk ki osztályunkban ezt a tevékenységet, és egy későbbi foglalkozáson térjünk vissza rá.

Az itt leírt tevékenység szinte minden tartalmi területen működőképes. Matematikában például lehetnek számszerű, geometriai vagy algebrai dolgok, amelyeket vizsgálunk, osztályba sorolunk és definiálunk. A természettudományokban lehetnek élőlények vagy akár kémiai elemek. A tanárok számára itt azt jelenti, a kihívást, hogy felfedezzék a lehetőségek tárházát.

Hasonlóságok és különbségek
A bemutatott példákban a tanulók akár úgy is dönthetnek, hogy a négyzet a kakukktojás, mert a kerülete különbözik a többitől (mert azoknak megegyezik); a téglalap a kakukktojás, mert más a területe stb. A figyelembe vett tulajdonságok között lehet a terület, a kerület, a szimmetrikusság, a szögek, a konvexitás stb. A sziluetteknél a tanulók sokféle szempontra gondolhatnak: az állat élőhelye, mozgása, szaporodása stb. A résztvevők találjanak ki további példákat!

Tulajdonságok és definíciók
Nincs olyan tulajdonság, ami önmagában definiálná a négyzetet. Érdemes megfontolni, hogy ilyen más alakzatokkal kerül egy osztályba a négyzet, ha csak egyetlen tulajdonságot veszünk figyelembe. Ha például azt a tulajdonságot nézzük, hogy „két egyenlő hosszú átló”, akkor minden téglalap és egyenlő szárú trapéz ide tartozik – és még talán mások is?
Ha egyszerre két tulajdonságot nézünk, akkor az eredmény nem olyan nyilvánvaló. Például „négy egyenlő oldal” és „négy derékszög” négyzetet definiál, de „derékszögben egymást metsző átlók és „négy egyenlő oldal” már nem. (Mi lehet még ilyen tulajdonságú?)

Definíciók megalkotása és kipróbálása
Első nekifutásra a résztvevők általában egy elég csiszolatlan definíciót írnak a poligonra vagy a madárra. Például: „egyenes vonalakkal rendelkező alakzat” vagy „repülő állat”. Azután belátják, hogy ezek nem megfelelőek az adott példákhoz. Ez arra sarkallja őket, hogy szigorúbb definíciót alkossanak, mint például: „síkbeli alakzat, amelyet olyan zárt vonal vagy görbe határol, amely véges sok egyenes szakaszból áll”. A definiálás nehéz terület, és a tanulók rá fognak jönni, hogy ugyanarra a jelenségre egymással versengő definíciók alkothatók (pl. a dimenzió fogalmára).

Osztályba sorolás kétdimenziós táblázattal
A kétszempontos osztályba soroláshoz nem a kétdimenziós táblázat az egyetlen eszköz, és a résztvevők továbbiakat javasolhatnak. Például Venn-diagramok és fagráfok széles körben használatosak a matematikában és a természettudományokban is.

Handout 2: Classifying and defining

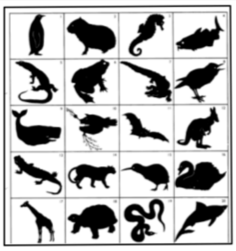
Similarities and differences

Show students three objects.
"Which is the odd one out?"
"Describe properties that two share that the third does not."
"Choose a different object from the three and justify it as the odd one out."

(a) (b) (c)

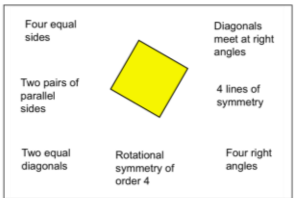
(a) $y = x^2-6x+8$
(b) $y = x^2-6x+9$
(c) $y = x^2-6x+10$

Show students some silhouettes of animals.
"Can you name the animals?"
"Cut out the 20 cards and arrange the animals into groups."
"Write down the criteria you used to establish the groups."
"Show your groups to another student. Can they work out what your criteria were from your groupings?"

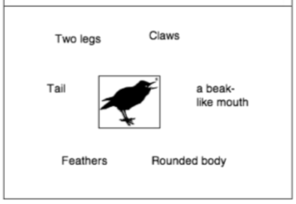


Properties and definitions

Show students an object.
"Look at this object and write down all its properties."
"Does any *single* property constitute a *definition* of the object? If not, what other object has that property?"
"Which *pairs* of properties constitute a definition and which pairs do not?"



"Look at this animal and write down all its features."
"Does any *single* feature uniquely identify the bird? If not, what other animal has that property/feature?"
"Which *pairs* of properties would uniquely decribe the bird? which pairs do not?"



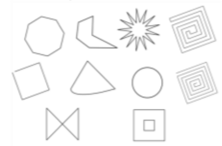
Creating and testing a definition

Ask students to write down the definition of a polygon, or some other mathematical word.

"Exchange definitions and try to improve them."

Show students a collection of objects.
"Use your definition to sort the objects."
"Now improve your definitions."

Which of these is a polygon according to your definition?

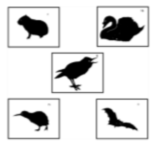


Ask students to write down a description of a bird, or some other plant or animal.

"Exchange descriptions and try to improve them."

Ask the students to look at silhouettes of some animals. "Using only your description, decide which of these animals can be called 'birds'."
"Now improve your description."

Which of these is a bird according to your description?

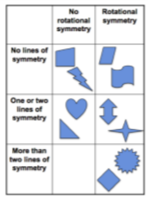


Classifying using a two-way table

Give students a two-way table to sort a collection of objects.

"Create your own objects and add these to the table."

"Try to justify why particular entries are impossible to fill."



Is it possible to find a shape that has no rotational symmetry which has more than two lines of symmetry?

(The silhouettes of animals are taken from Nuffield-Chelsea Curriculum Trust, 1987).

C: REPREZENTÁCIÓK EGYMÁSBA ALAKÍTÁSA

A szükséges idő: 20 perc

A matematikai és természettudományos fogalmaknak sokféle reprezentációjuk van: szavak, ábrák, táblázatok, grafikonok stb. Fontos a tanulóknak megtanulniuk összefüggően beszélni ezekről a reprezentációkról, és tudniuk kell váltani közöttük. Az alábbi táblázat minden egyes cellájára gondoljunk úgy, mint fordítási feladatra. Az osztályteremben néhány ilyen „fordítás” megszokottabb, például gyakran kérjük arra a tanulókat, hogy táblázatok és grafikonok között váltsanak. Ezt „plotting”-nak, pontonkénti ábrázolásnak nevezzük.

	szavak	**képek**	**táblázatok**	**grafikonok**	**képletek**
szavak					
képek					
táblázatok				pontonkénti ábrázolás	
grafikonok					
képletek					

- Melyik reprezentációt használjuk leggyakrabban az osztályteremben?
- Melyik „fordítási” eljárást hangsúlyozzuk leginkább? Melyik kap kevesebb figyelmet?
- Beszéljük meg a **3-as Handout** példáit!

Ahogyan a résztvevők ezeken a példákon dolgoznak, rá fognak jönni, hogy némelyik kevéssé gyakorinak tekinthető az osztályteremben. Néhány példa:

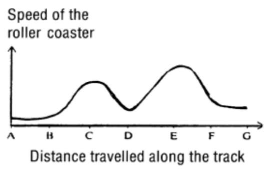
Munkaidő

A szavak fordított arányosságot írnak le, ami számokban például így fejezhető ki:

Emberek száma	1	2	3	4	5	6
Munkaórák száma	24	12	8	6	4.8	4

Hullámvasút

Egy lehetséges jó megoldást mutatunk itt. Érdekes, hogy néhány tanuló milyen nehéznek találja ezt, főleg ha a grafikont a hullámvasút képének tekintik.



Szavak és képletek

$$n \rightarrow \frac{2n+6}{2} - n = 3$$

A gyerekek általában élvezik a találgatást, és megpróbálják a lehető legbonyolultabb képletet kihozni.

Táblázatok és grafikonok

A példa sokkal inkább a grafikon felvázolására, semmint a pontonkénti ábrázolás gyakorlására van.

Sportverseny

$$m = n(n-1)$$

	A	B	C	D	E
A		AvB	AvC	AvD	AvE
B	BvA		BvC	BvD	BvE
C	CvA	CvB		CvD	CvE
D	DvA	DvB	DvC		DvE
E	EvA	EvB	EvC	EvD	

Az ábra mutatja a megoldást.
n^2 - n cella van.

Pingvinek

A testtömeg a térfogattal arányos, így a dimenziók figyelembe vételével az jön ki, hogy a testtömeg a magasság köbével arányos, ha a pingvinek egyforma alakúak. Ez ésszerű feltételezés, és a következő modellhez vezet:

$$w = 20\, h^3$$

ahol h a méterben megadott magasságot jelenti
w pedig a testtömeg kilogrammban kifejezve.

Handout 3: Translating between representations

Translating between representations

Words and tables
Given a verbal description, students are asked to produce a table of values.
Given a table, students are asked to describe the relationship in words.

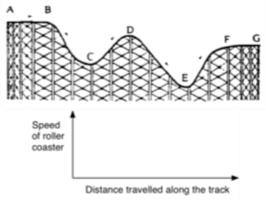
Job times
Construct a table to show this relationship:
" If we double the number of people on the job, we will halve the time needed to complete it."

Number of people	1	2	3	4	5	6
Time taken in hours						

Pictures and graphs
Given a picture of a situation, students imagine how the situation might evolve with time and sketch a graph

Given a graph, students are asked to sketch the corresponding picture of the situation

Roller coaster
Sketch a graph to show the speed of the roller coater as it travels along the track.



Words and formulae
Students are asked to symbolise a "think of a number" type problem,, and thus explain why it works.
Students invent an algebraic identity and then devise a "think of a number" problem to accompany it.

Think of number
"Think of a number. Double it. Add 6. Divide by 2. subtract the number you first thought of. Show that the answer is always 3."

Create your own example.

Tables and graphs
Students are asked to sketch a graph from a given table of data, without plotting.

Students devise a table of data that would fit a given sketch graph.

Life expectancy
Sketch a graph to fit the data

Age (yrs)	Number of survivors	Age (yrs)	Number of survivors
0	1000	50	913
5	979	60	808
10	978	70	579
20	972	80	248
30	963	90	32
40	950	100	1

Translating between representations (continued)

Tables and formulae
Given a table of data, students search for a general rule which governs it.

Students use this rule to make predictions.

Tournaments

The table shows the number of matches (m) that are required for a league tournament, where each team plays every other team twice, once at home and once away. Find a formula that gives the relationship between the number of teams (n) and the number of matches (m).

Number of teams (n)	2	3	4	5	6	7	8
Number of matches (m)	2	6	12	20	30	42	56

Use your formula to predict new entries in the table.
(E.g. How many matches do 20 teams require ?)

Formulae and graphs

Students plot the points on a spreadsheet and try to fit an algebraic function to the data using trial and improvement methods.

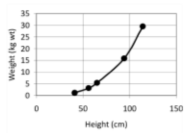
This involves translating directly back and forth between graphs and formulae, building up valuable intuitions about the shapes of various functions.

Penguins

Try to fit a function of the form $y = ax^n$ to the graph showing average heights and weights of five types of penguin.

Predict the weight of a now extinct penguin whose height was believed to be 150 cm.

	Height (cm)	Weight (kg wt)
Emperor	114	29.48
King	94	15.88
Yellow eyed	65	5.44
Fjordland	56	3.18
Southern blue	41	1.13



Roller coaster and *Life Expectancy* were taken from Swan (1985) *The Language of Functions and Graphs*, Shell Centre for Mathematical Education/Joint Matriculation Board. *Tournments* was adapted from Swan (1983) *Problems with Patterns and Numbers*, Shell Centre for Mathematical Education/Joint Matriculation Board. These examples also appeared in Swan and Crust (1993) *Mathematics Programmes of Study, Inset for Key Stages 3 and 4*, National Curriculum Council, York.

D: REPREZENTÁCIÓK ÖSSZEKAPCSOLÁSA

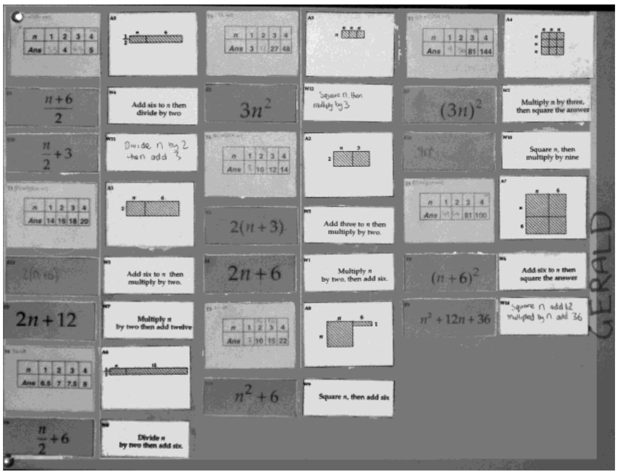
A szükséges idő: 20 perc

A **4-es Handout**-on szereplő feladat célja, hogy előmozdítsa a tanulók fejében a szóbeli, a számszerű, a térbeli és az algebrai reprezentációk összekapcsolását. Most két-háromfős kis csoportokban dolgozunk. Először is kivágjuk a kártyákat.

- Vágjuk ki a **4-es Handout** kártyáit!
- Először az A kártyasort: *algebrai kifejezések* illesszük a B kártyasor tagjaihoz. A párokat helyezzük egymás mellé, felfelé fordítva az asztalra! Ha úgy tűnik, hiányzik egy vagy több kártya, azt készítsük el.
- Ezután a C kártyákat helyezzük a már megtalált párok mellé. Előfordulhat, hogy egy táblázat több algebrai kifejezéshez is illik. Hogyan tudnánk megindokolni önmagunk, kollégáink és a tanulók számára, hogy ez mindig így van, függetlenül n értékétől?
- Ezután a D kártyák következnek, és ezeket a már meglévő triádok mellé tesszük. Hogyan segítenek ezek a kártyák annak megértésében, hogy különböző algebrai kifejezések egymással ekvivalensek?
- Beszéljük meg, hogy a tanulóknak milyen nehézségeik lehetnek ezzel a feladattal!

A végső, négyes összetartozó kártyák egy poszterre is kirakhatók, mint ahogyan az itt látható.

A következő, 5 perces videoklipen gyengén teljesítő 16-17évesek szerepelnek, akik korábban nemigen értették az algebrát.



- Nézzük meg a videoklipet!
- Milyen nehézségeik voltak a tanulóknak ebben a feladatban?
- Hogyan segít nekik a tanár?

Végül a résztvevők gondolják át, hogy ez a fajta tevékenység hogyan alkalmazható azokra a reprezentációkra, amelyeket ők a saját osztályukban tanítani szeretnének.

- Tervezzük meg saját kártyáinkat, amelyek segítenek a tanulóknak a különböző, általunk tanított reprezentációs formák összekapcsolásában!

Handout 4: Representing and making connections

Each group of students is given a set of cards. They are invited to sort the cards into sets, so that each set of cards have equivalent meaning. As they do this, they have to explain how they know that cards are equivalent. They also construct for themselves any cards that are missing. The cards are designed to force students to discriminate between commonly confused representations.

Card Set A: Algebra expressions

E1 $\dfrac{n+6}{2}$	E2 $3n^2$
E3 $2n+12$	E4 $2n+6$
E5 $2(n+3)$	E6 $\dfrac{n}{2}+6$
E7 $(3n)^2$	E8 $(n+6)^2$
E9 $n^2+12n+36$	E10 $3+\dfrac{n}{2}$
E11 n^2+6	E12 n^2+6^2
E13	E14

Card Set B: Verbal descriptions

W1 Multiply n by two, then add six.	W2 Multiply n by three, then square the answer
W3 Add six to n then multiply by two.	W4 Add six to n then divide by two
W5 Add three to n then multiply by two.	W6 Add six to n then square the answer
W7 Multiply n by two then add twelve	W8 Divide n by two then add six.
W9 Square n, then add six	W10 Square n, then multiply by nine
W11	W12
W13	W14

Card Set C: Tables

T1

n	1	2	3	4
Ans	14	16	18	20

T2

n	1	2	3	4
Ans			81	144

T3

n	1	2	3	4
Ans		10	15	22

T4

n	1	2	3	4
Ans	3		27	48

T5

n	1	2	3	4
Ans			81	100

T6

n	1	2	3	4
Ans		10	12	14

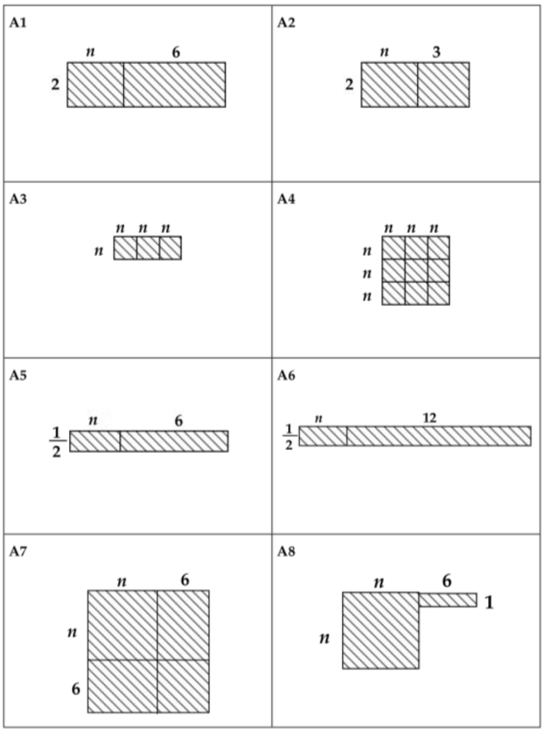
T7

n	1	2	3	4
Ans		4		5

T8

n	1	2	3	4
Ans	6.5	7	7.5	8

Card Set D: Areas



Swan, M. (2008), *A Designer Speaks: Designing a Multiple Representation Learning Experience in Secondary Algebra*. Educational Designer: Journal of the International Society for Design and Development in Education, 1(1), article 3.

E: BECSLÉS

A szükséges idő: 20 perc.

A becsléses feladatokban a tanulók előfeltevésekből indulnak ki, azután ezekre egy következtetési láncot építenek föl. A diákok gyakran érzik úgy az ilyen feladatoknál, hogy egyedül képtelenek megbirkózni a problémával, de ha kooperatívan dolgoznak, akkor meglepően sok tudáselemet be tudnak építeni a közös megoldásba.

- Párokban vagy kis csoportokban dolgozzunk az **5-ös Handout**-on található fa-problémán!
- Amikor minden csoport elkészült a válasszal, egymás után mindegyik mutassa be a megoldást, beleértve azokat az előfeltevéseket, amelyekre a megoldás épült.
- Melyik megoldás tűnik a legmegalapozottabbnak? Miért?

A következő lista egy olyan megközelítésmódot mutat be, amit tanárok körében tapasztaltunk:

1. Adjunk becslést az ország lakosságának számát illetően!
2. Adjunk becslést az átlagos családméretre!
3. Becsüljük meg egyátlagos napilap terjedelmét!
4. Feltéve, hogy minden család vásárol naponta egy napilapot, adjunk becslést az összes, naponta elfogyasztott napilap terjedelmére.
5. Mekkora lehet egy megfelelő fa használható részének sugara és magassága?
6. Számítsuk ki a fatörzs térfogatát!
7. Feltéve, hogy a teljes fatörzsből újságpapír lesz, a (4) és (6) pontokban nyert adatokból becsüljük meg a szükséges famennyiséget!

Az itt következő adatokat az erdészeti bizottság szolgáltatta, és hasznos ellenőrzési lehetőséget jelentenek:

> "A példa azt sugallja, hogy a teljes törzsből papír lesz. Valójában csak egy kisebb része használható újságpapír készítésére. Körülbelül 2,8 kg fából lesz 1 kg újságpapír. A köbméter frissen kivágott fa, ami megy a zúzómalomba, kb. 920 kg. Ez a Sitka fenyőre vonatkozó egész éves átlagadat. Amikor 55 éves korában kivágják a fát, az kb. 0,6 köbméter, beleértve a fakérget. A talajtól 1,4 méterre mért átmérő 27 cm.

- Írj le néhány becslési feladatot, ami alkalmas lehet arra, hogy a saját osztályodban dolgozzatok rajta!
- Beszéljétek meg, hogyan lehetne egy tanítási órát szervezni a becslési feladat köré!

Néhány lehetséges becslési feladat:

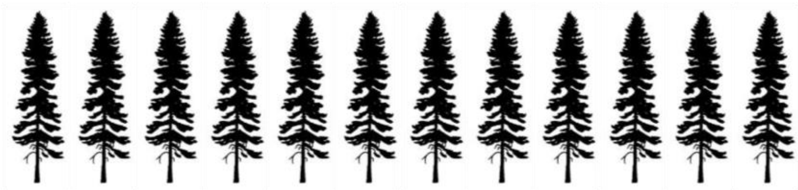
- Mennyit iszol egy év alatt?
- Mennyi tanár van az országban?
- Mennyi ideig tartana felolvasni a számokat 1-től 1 millióig? Más nyelveken más eredmény adódna?
- Hány ember férne el kényelmesen állva az osztályteremben?
- Hányat dobban egy év alatt a szívünk?
- Hány füzetet írsz tele az iskolás éveid alatt?
- Mennyi házi kisállat lehet összesen a városban?

Handout 5 Estimating

Work on the following problem together.

Trees

About how many trees are needed each day to provide newspapers for your country?



Try to make a reasonable estimate based on facts that you already know.

In solving this question, you have had to make assumptions and construct a chain of reasoning.

Write down a list of estimation questions that would be suitable for your own class.

F: MÉRÉS ÉS SZÁMSZERŰSÍTÉS

A szükséges idő: 20perc.

A társadalom folyamatosan létrehoz különböző mértékeket, mérési egységeket. Vannak mérőeszközök az alapvető fogalmak mérésére (pl. hosszúság, idő, tömeg, hőmérséklet, sebesség, sűrűség) és az összetettebb társadalmi jelenségekre (pl. tudományos teljesítmény, jólét, infláció, munkateljesítmény, az oktatás minősége, sportteljesítmény, szépség). A matematikusok és a természettudósok azért fejlesztenek ki mérőeszközöket, hogy mintázatokat, összefüggéseket és törvényszerűségeket keressenek. A politikusok a folyamatok nyomon követésére és ellenőrzésére használnak mért adatokat. Minden művelt embernek tudnia illik, hogy sokféle mérőeszköz és mérőszám tovább fejleszthető, és jobbá tehető.

- Milyen mérőeszközökkel, mérési feladatokkal találkozunk a hétköznapokban? A **6-os Handout** alapján készítsünk egy listát!
- Milyen mérésekkel találkoznak a tanulók?

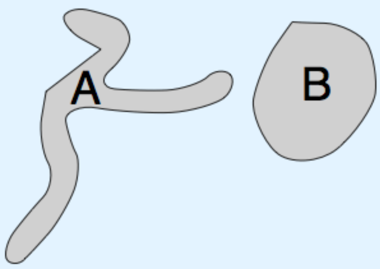
A **6-os Handout-on** kétféle tevékenységet javaslunk a tanulók számára.

- Dolgozzunk együtt a *lejtés mérése* feladaton!+
- Próbáljunk meggyőző magyarázatot találni arra, hogy miért a *lépcső magassága / lépcső hossza* a jobb lehetőség a lejtés mérésére.
- Tudunk-e találni alternatív mérési módszert ugyanerre a fogalomra?

A *lépcső magassága / lépcső hossza* arány jobb, mint a *lépcső magassága – lépcső hossza* különbség, mert az arány dimenzió nélküli. Ez azt jelenti, hogy ha geometriai értelemben felnagyítunk egy lépcsősort, akkor az arány nem fog változni, de a különbség igen.

Az utolsó feladat itt egy olyan hétköznapi fogalom mérésével kapcsolatos, amit magyarul talán tömörségnek nevezhetnénk (kompaktság kissé idegenül hangzik):

Az utóbbi években a földrajztudósok megpróbálták különböző földterületek alakját különböző módokon meghatározni. Konkrétan egy terület kompaktságának a mérésére törekedtek. Feltehetőleg van már előzetes elképzelésünk arról, hogy mit jelent, ha valami kompakt, tömör. A rajzon két szigetet látunk. A B sziget nyilván kompaktabb, mint az A sziget. A kompaktságnak semmi köze a méretekhez, hiszen lehet egy sziget kicsi és kompakt, de lehet nagy és kompakt is.



- Rajzoljunk néhány alakzatot, és rakjuk őket a kompaktság szerinti sorrendbe!
- Próbáljunk közös nevezőre jutni, hogy mit értsünk kompaktság alatt!
- Vajon a terület/kerület jól méri a kompaktságot? Miért vagy miért nem?
- Próbáljuk meg több különböző módon mérni a kompaktságot! Próbáljuk 0 és 1 között számként értelmezni a kompaktságot, ahol 1 jelenti a tökéletesen kompakt alakzatot!
- Hasonlítsuk össze ezután az elképzelésünket a 7-es Handout-on található, a földrajzosok által kidolgozott ötletekkel!
- Végül gondoljunk más hétköznapi fogalmakra, és hogyan mérnénk azokat (visszatérve a 6-os Handout-ra).

Handouts 6 and 7 Measuring and quantifying

What measures do your students meet in everyday life?

Make a list:

Possible activities for students:

Comparing measures

Give students two ways of measuring something. Ask students to compare them and say why one is better than another.

Measuring slope

Put these staircases in order of steepness.

Is **"Height of step - length of step"** a good measure of steepness?

Why is **"Height of step ÷ length of step"** better?

Creating measures

Ask students to devise a measure for an everyday phenomenon and then use it.

How would you measure:

- the "compactness" of a geometrical shape?
- the "stickiness" of adhesive tape?
- the "bendiness" of a river?
- the "difficulty" of a bend in the road?
- the "fitness" of a person?

Measuring compactness

The inadequacy of using *area ÷ perimeter* as a measure of compactness may be seen by comparing two similar shapes of different sizes. Consider, say a square of side two units and a square of side three units. We would say that they are equally compact as they are both squares, but using the ratio *area ÷ perimeter*, their measures would be different: 4/8 = 0.5 and 9/12 = 0.75.

We could adapt this measure to make it dimensionless by using the formula: $C = \frac{a}{p^2}$, where a = area and p = perimeter. This would then give the value 1/16 to both squares. This ratio takes a maximum value when the shape is circular. In this case, $C = \frac{\pi r^2}{(2\pi r)^2} = \frac{1}{4\pi}$.

In order to make the measure lie between 0 and 1, we could therefore scale the measure by multiplying by 4π. This is used by geographers and is called the **Circularity ratio** (Selkirk, 1982):

Circularity ratio

$C_1 = \frac{4\pi a}{p^2}$ where a = area; p = perimeter of the shape

One criticism of this measure is that it is difficult to define and calculate p when one is trying to measure very large, irregular boundaries like countries or river basins. Other possible measures, also quoted by Selkirk, are:

Form ratio

$C_2 = \frac{4a}{\pi l^2}$ where a = area; l = length of a line joining the two most distant points

Compactness ratio

$C_3 = \frac{a}{\pi R^2}$ where a = area; R = radius of smallest circle that surrounds the shape

Radius ratio

$C_4 = \frac{r}{R}$ where r = radius of largest circle that will fit inside the shape;

R = radius of smallest circle that surrounds the shape

Reference: Selkirk, K (1982) *Pattern and Place - An Introduction to the Mathematics of Geography*, Cambridge University Press.

G: KIJELENTÉSEK ÉRTÉKELÉSE

Az aktív tanulásban részt vevő tanulókat folyamatos kihívásként érik a mások által generált hipotézisek és következtetések. Az itt leírt tevékenységek ezt a fajta viselkedést mozdítják elő.

Két vagy háromfős kis csoportokban dolgoznak a résztvevők a **7-es Handout alapján.**

Kijelentéseknek egy gyűjteményét látjuk:

- Dönts minden állítás érvényességéről, és magyarázzuk is meg döntésünket! A magyarázatban szerepeljenek példák és ellenpéldák, amelyek az állítások mellett vagy ellen szólnak!
- Ezen túl akár hozzá is tehetünk az állításokhoz, módosíthatunk azokon, hogy „mindig igaz”-ak legyenek.
- Találjunk ki néhány olyan kijelentést, amelyek érdekes vitát generálhatnak a saját osztályunkban!

Ez a tevékenység nagyon hatásos. Az itt szereplő kijelentések segítségével a tanulók felszínre hozhatják és megvitathatják tévképzeteiket és hibáikat. A tanár feladata az, hogy figyelmeztesse a tanulókat, mindig igazolják állításaikat, példákkal vagy ellenpéldákkal. Néhány példa erre?

Fizetésemelés:
"OK, tehát úgy gondolod, néha igaz, attól függően, hogy Max és Kim mennyit keresnek. Tudsz mondani olyan esetet, amikor Jim nagyobb fizetésemelést kap? Tudsz olyan példát mondani, amikor éppen egyforma fizetésemelést kapnak?

Terület és kerület:
"Tudsz példát adni olyan vágásra, amikor a kerület nő, a terület pedig csökken?"
"Képzeld el, hogy beleharapok ebben a háromszög alakú szendvicsbe. Mi történik a kerületével és a területével"

Derékszögek:
Be tudnád *bizonyítani*, hogy ez mindig igaz?

Nagyobb törtek:
Úgy gondolod, mindig igaz? Tudnál rajzolni egy ábrát, ami azt mutatja, hogy ez így van?
Mi a helyzet, ha olyan törtből indulunk, amelyik 1-nél nagyobb?

Handout 7: Always, sometimes or never true?

Pay rise Max gets a pay rise of 30%. Jim gets a pay rise of 25%. So Max gets the bigger pay rise.	**Sale** In a sale, every price was reduced by 25%. After the sale every price was increased by 25%. So prices went back to where they started.
Area and perimeter When you cut a piece off a shape you reduce its area and perimeter.	**Right angles** A pentagon has fewer right angles than a rectangle.
Birthdays In a class of ten students, the probability of two students being born on the same day of the week is one.	**Lottery** In a lottery, the six numbers 3, 12, 26, 37, 44, 45 are more likely to come up than the six numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Bigger fractions If you add the same number to the top and bottom of a fraction, the fraction gets bigger in value.	**Smaller fractions** If you divide the top and bottom of a fraction by the same number, the fraction gets smaller in value.
Square roots The square root of a number is less than or equal to the number	**Series** If the limit of the sequence of terms in an infinite series is zero, then the sum of the series is zero.

H: KÍSÉRLETEZÉS ÉS VÁLTOZÓK KONTROLLÁLÁSA

A szükséges idő: 40 perc.

Kétféle tevékenységet mutatunk be itt. Az első egy kísérleti tervezését foglalja magában, a másik egy számítógépes alkalmazásra épül, ami része ennek a modulnak.

Kezdjük azzal, hogy megbeszéljük a 8-as Handout-on található két problémát.

- Válasszuk ki a *Kísérlet tervezése* rész egyik tudományos kérdését!
- Kis csoportokban dolgozzunk a kísérleti elrendezésen.
- A természettudományi órákon gyakran a tanár tervezi meg a kísérletet, és a tanulók végrehajtják. A kísérleti tervezésével kapcsolatos döntések átadása számos kihívást jelent a tanárok és a tanulók számára is. Például a tanulók olyan eszközt kérhetnek, ami nem áll rendelkezésre. Milyen más nehézségek adódhatnak? Készítsünk egy listát!

Most az utolsó feladatra, a testtömegindex-kalkulátorra összpontosítunk.

- Párokban dolgozunk a testtömeg-indexszel kapcsolatos feladaton, a számítógépes alkalmazást használva.
- Írjuk le a módszert, amit alkalmaztunk!
- Nézzük meg a videoklipet erről a feladatról.
  - Hogyan szervezte meg a tanár az órát? Milyen fázisokon haladtak keresztül?
  - Vajon miért így szervezte meg az órát?
  - Hogyan vezette föl a problémát a tanulóknak?
  - Milyen különböző megközelítésmódokat alkalmaztak a tanulók?
  - Hogyan segítette a tanár azokat, akiknek nehézségeik akadtak a feladattal?
  - Hogyan mozdította elő a tanár a különböző módszerek és stratégiák megbeszélését?
  - Vajon mit tanultak a tanulók ebből a leckéből?

Könnyű megtalálni a BMI küszöböket, amikor valaki sovány/túlsúlyos/elhízott, ha rögzítjük az egyik értéket, a másikat pedig szisztematikusan változtatjuk. A következő határok adódnak:

	BMI
Sovány	18,5 alatt
Ideális	18,5-24,9
Túlsúlyos	25,0-29,9
Elhízott	30,0 és fölötte

Hogy a kalkulátor működését megfejtsük, legjobb, ha nem valódi értékekkel dolgozunk, hanem egyszerűen valamelyiket konstansnak vesszük, a másik pedig szisztematikusan változtatjuk. Ha például a tanulók a magasságot beállítják 2 méterre (ez tulajdonképpen valóságos érték is lehet), akkor a következő táblázatot (vagy grafikon-adatokat) nyerik:

Testtömeg (kg)	60	70	80	90	100	110	120	130
BMI	15	17,5	20	22,5	25	27,5	30	32,5
	Sovány		**Ideális**		**Túlsúlyos**		**Elhízott**	

Ezekből az adatoktól látszik, hogy a testsúly és a BMI között egyenes arányossági viszony van. (Ha megduplázzuk a testsúlyt, a BMI duplájára nő, jelene esetben BMI = Testsúly/4)

Handout 8: Experimenting and controlling variables

Devising a fair test

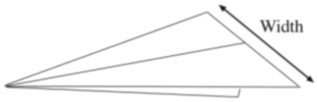
Students are asked to devise and conduct an experiment to find the relationship between two or more variables. As they do this, they must consider how they will control other variables.

As they do this, they must consider how they will control other variables.

One lump or two?

It takes some time for sugar cubes to dissolve in coffee. What factors might affect the rate of dissolving? Devise and conduct an experiment to investigate the relationship between the rate of dissolving and one of these factors.

Paper aeroplane



Alice wants to know how to make a paper aeroplane that will fly for a long time. What factors might affect the flight time?

Devise and conduct an experiment to investigate the relationship between the flight time and one of these factors.

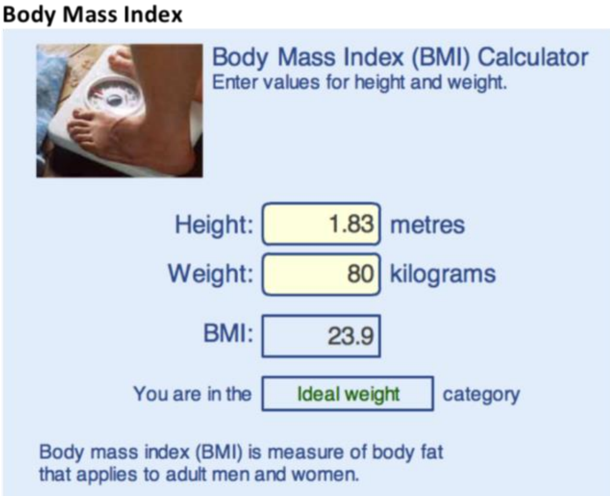
Exploring how a calculator works

Students are given a spreadsheet or online calculator to explore. The challenge is to find out how it works.

For example, the calculator shown here is used on websites to help an adult decide if he or she is overweight. Students enter values for heights and weights and collect data in order to discover how the calculator calculates the BMI.

There are many other examples online.

Body Mass Index



The BMI activity is taken from Swan, M; Pead, D (2008). *Professional development resources*. Bowland Maths Key Stage 3, Bowland Trust/ Department for Children, Schools and Families. Available online in the UK at: http://www.bowlandmaths.org.uk. It is used here by permission of the Bowland Trust.

I: EGY FOGLALKOZÁS MEGTERVEZÉSE, KIPRÓBÁLÁSA ÉS A TAPASZTALATOK MEGBESZÉLÉSE

A szükséges idő:

- ***15 perces megbeszélés a foglalkozás előtt***
- ***1 órás foglalkozás***
- ***15 perc a foglalkozást követően***

Válassza ki a feladatok egyikét, amelyikről azt gondolja, hogy megfelelő az osztály számára.

Beszéljük meg, hogyan fogja:

- Elrendezni az osztálytermet és a kellékeket.
- Ismertetni a problémát a tanulókkal.
- Megmagyarázni a tanulóknak, hogyan dolgozzanak együtt.
- Érdekessé tenni a feladatot azok számára, akik túl egyszerűnek találják.
- Segíteni azokat, akik a feladatot nehéznek találják.
- Segíteni a tanulókat abban, hogy megosszák egymással a különböző problémamegoldó stratégiákat és tanuljanak egymástól.
- Lezárni a tanegységet

Ha a tanártovábbképzésen csoportban dolgozunk ezen a modulon, célszerű ugyanazt a feladatot választani, mert az megkönnyíti a foglalkozástervek megbeszélését.

Most, hogy megvolt a tanulókkal a foglalkozás, reflektáljunk arra, ami ott történt.

- A munkálkodásnak erre a formájára milyen típusú tanulói reakciókat tapasztalt?
  Voltak, akik magabiztosnak tűntek? Kellett néhánynak segítség? Milyen típusú segítség?
  Miért volt szükség segítségre?
- Milyen támogatás és irányítás tűnt szükségesnek?
  Miért? Túl sok vagy túl kevés segítséget kaptak a tanulók?
- Milyen különböző stratégiákat használtak a tanulók?
  Hozzon példát két-háromféle tanulói megoldásra.
- Mit gondol, mit tanultak a tanulók ebből a leckéből?

FURTHER READING

Swan, M (2005) Improving Learning in Mathematics: Challenges and Strategies, Department for Education and skills and dowloadable from: http://www.nationalstemcentre.org.uk/elibrary/resource/1015/improving-learning-in-mathematics-challenges-and-strategies

REFERENCES

Millar, R. (1994). What is 'scientific method' and can it be taught? In R. Levinson (Ed.), *Teaching Science* (pp. 164-177). London: Routledge.

Wood, D. (1988). *How Children Think and Learn*. Oxford and Cambridge, MA: Blackwell.

Wood, D., Bruner, J., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of child psychology and psychiatry, 17*, 89-100.