

## KONZEPTE FÜR FORSCHENDES LERNEN

### Einleitung

Diese Lektion betrachtet, wie die Prozesse von forschendem und entdeckendem Lernen in den Inhalt des Mathematik- und naturwissenschaftlichen Unterrichts integriert werden kann. Diese zwei Aspekte des Lernens werden oftmals separat betrachtet: wir vermitteln Inhalte als eine Sammlung von Fakten und Fähigkeiten, die nachgeahmt und bewältigt werden sollen und/oder wir unterrichten Prozesswissen mit Mitteln, die kein umfassendes und wichtiges Fachwissen entwickeln. Die Integration von Inhalt und Prozess stellt viele pädagogische Herausforderungen dar.

Die Prozesse, die wir hier betrachten sind: Beobachtung und Visualisierung, Klassifizierung und Erstellung von Definitionen, Erstellung von Darstellungen und zwischen denen übersetzen, Verbindungen und Beziehungen finden, Einschätzen, Messen und Quantifizieren, Evaluieren, Experimentieren und Controlling der Variablen. Wie einige schon darauf hingewiesen haben, sind diese Entwicklungen natürlicher menschliche Fähigkeiten, die wir von Geburt an anwenden (Millar, 1994). Wir verwenden diese bis zu einem gewissen Ausmaß die ganze Zeit unbewusst. Wenn diese Fähigkeiten durch die Lehrer weiterentwickelt werden, um den Schülern zu helfen Konzepte der Mathematik und Naturwissenschaften zu verstehen, werden die Schüler ein viel engagierteres Lernverhalten vorweisen.

Diese Lektion enthält viele Aufgaben- zu viele für eine Sitzung. Diese Lektion ist dafür gedacht als ein Menü zu verwenden, aus dem Fortbilder Material auswählen können. Es ist jedoch wichtig, dass den Teilnehmern die Gelegenheit geboten wird, einige dieser Aufgaben in ihrem Unterricht auszuprobieren und Rückmeldung über die Ergebnisse zu geben.

### Aufgaben

Aufgabe A: Beobachtung und Visualisierung .....	2
Aufgabe B: Klassifizierung und Bestimmung .....	4
Aufgabe C: Darstellung und Übersetzung .....	6
Aufgabe D: Verbindungen herstellen .....	8
Aufgabe E: Einschätzen.....	10
Aufgabe F: Messung und Quantifizierung .....	12
Aufgabe G: Evaluierung der Aussagen, Ergebnisse und Argumentation.....	14
Aufgabe H: Experimentieren und Controlling der Variablen.....	16
Aufgabe I: Einen Unterricht erstellen, ihn unterrichten und die Ergebnisse reflektieren .....	18
Literaturhinweise.....	<b>Fehler! Textmarke nicht definiert.</b>
Referenzen.....	<b>Fehler! Textmarke nicht definiert.</b>

#### **Anerkennung:**

Die Module sind für [PRIMAS](#) von professionellen Entwicklungsmaterialien, entwickelt von dem [Shell Centre](#) Team im [Centre for Research in Mathematics Education](#), University von Nottingham, zusammengestellt worden. Dies beinhaltet Materialien, die von [Improving Learning in Mathematics](#) © Crown Copyright (UK) 2005 durch freundliche Genehmigung des „Learning and Skill Improvement Service“ [www.LSIS.org.uk](http://www.LSIS.org.uk) abgewandelt worden sind.

## AKTIVITÄT A: BEOBACHTUNG UND VISUALISIERUNG

### Benötigte Zeit - 30 Minuten

Die Abläufe des Beobachtens und Visualisierens sind natürliche Fähigkeiten die wir von Geburt an haben. Beobachtung ist zunächst das, was wir direkt sehen und wahrnehmen können, wohingegen Visualisierung bedeutet, dass wir uns etwas vorstellen und umwandeln können, sozusagen vor unserem „geistigen Auge“. Der Streitpunkt hier ist, dass diese Fähigkeiten im Klassenraum oftmals zu wenig angewandt werden, zumindest teilweise, da wir keine Aufgaben stellen, die die Anwendung dieser Fähigkeiten für ihre erfolgreiche Ausführung *benötigen*.

Die Aufgaben, die hier vorgestellt werden, sollen nur Beispiele für drei Wege sein, die die Fähigkeit der Schüler zur Beobachtung und Visualisierung nutzbar zu machen. Dies sind nur Beispiele; Alternativen sind auf jedem Schwierigkeitsgrad leicht zu finden. In der linken Spalte des Arbeitsblattes, finden Sie allgemeine Beschreibungen der Aufgaben, während in der rechten Spalte konkrete Beispiele offeriert werden. Diese werden hier unten kurz besprochen.

- Arbeiten Sie an einigen Aufgaben auf dem **Handout 1**.
- Teilen Sie Ihre Beobachtungen und mentalen Bilder:
  - Haben Sie das Objekt unterschiedlich „*betrachtet*“?
  - was ist Ihnen aufgefallen oder was hat Ihre *Aufmerksamkeit erhalten*?
  - was haben Sie versucht mental zu verändern?
- Versuchen Sie eine Aufgabe zu entwickeln, indem Sie eine dieser Arten für den Gebrauch in Ihrem Klassenzimmer verwenden. Versuchen Sie Beispiele zu finden, die die Schüler dazu zwingen Gegenstände sorgfältig zu betrachten und die zu Diskussionen über Definitionen anregen werden.
- Probieren Sie Aufgabe aus und erstatten Sie Bericht darüber.

### Alhambra

Die Alhambra-Fliesen sind ein Komplex mit wiederholendem Muster, die aus verschiedenen Formen bestehen. Sie können bitten Teilnehmer, einzelne Fliesen zu skizzieren, die an dieser Konstruktion beteiligt sind. Zwei kleine Fliesen reichen, wie unten aufgeführt. Könnte das Muster aus einer kleinen Fliese bestehen?



### Würfel aus Käse

Bitten Sie die Teilnehmer alle Formen zu beschreiben, die sie „sehen“, wenn der Käse geschnitten ist. Zunächst erkennt man ein Dreieck, welches nicht näher definiert ist, da dieses vom Schnittwinkel des Messers abhängt. Wenn immer größere Schnitte vorgenommen werden, könnten die Teilnehmer überrascht sein alle Formen von Vier-, Fünf- und Sechsecken zu „sehen“. Wenn sie darüber diskutieren, könnten sie weitere Abbildungen skizzieren und weiter daran arbeiten wollen. Fördere dies aber erst nachdem sie versucht haben Kopfgeometrie zu betreiben.



### Kabel von Hängebrücken

Verschiedene Ansichtsweisen führen zu unterschiedlichen Abläufen und algebraischen Ausdrücken:

			Man kann die Abbildung ebenfalls als einen Unterschied von zwei Würfeln sehen:
1, 7, 19, .....	$3n(n-1) + 1$	$n^2 + 2(n-1)^2 + (n-1)$	

## Handout 1: Beobachtung und Visualisierung der Aufgaben

### Beschreibung und Nachbildung von dem, was man sieht

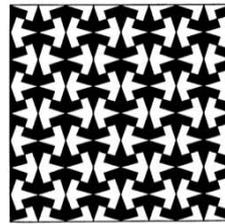
Zeigen Sie der Klasse ein Poster oder ein Objekt und bitten sie diese darum, so genau wie möglich zu beschreiben, was sie sehen können.

Setzen Sie zwei Schüler Rücken an Rücken und geben Sie einem von beiden eine einfache geometrische Form. Diese Person soll die Form so beschreiben, dass die zweite es genau nachzeichnen kann.

#### Alhambra Muster

Diese Kachelmuster sind im Alhambra Palast in Granada, Spanien vorzufinden.

- Wie würdest du dieses Muster jemandem beschreiben, der es nicht sehen kann?
- Beschreibe, wie die einzelnen Kacheln konstruiert sein könnten.



### Visualisierung

Bitten Sie die Schüler ihre Augen zu schließen und sich eine Situation vorzustellen, in der sich etwas verändert. Bitten Sie diese zu beschreiben, was sie „sehen“.

#### Würfel aus Käse

Stell dir vor du hast einen Würfel aus Käse und ein Messer. Stell dir vor du schneidest eine kleine Ecke von dem Käse ab. Welche Form erhältst du dann?

Stell dir vor du schneidest mehr und mehr parallele Scheiben von dem Käse ab. Wie wird sich dein Dreieck verändern? Welche Formen werden sich ergeben? Fahre fort bis kein Käse mehr übrig ist!  
Jetzt änder den Winkel deines Messers...

### Strukturen erkennen

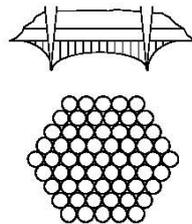
Geben Sie den Schülern eine Problemstellung, die sie anregt nach verschiedenen Strukturen innerhalb eines Kontexts zu suchen.

Bitten Sie sie darum ihre Strukturen zu nutzen, um Verallgemeinerungen zu erstellen.

Im folgenden Beispiel könnten sie gefragt werden:

- Auf welcher Weise kann man die Kabel zählen?
- Kannst du die Abbildung auf verschiedene Weise betrachten?
  - Kannst du es bestehend aus Parallelogrammen oder aus Dreiecken sehen?
  - Kannst du eine dreidimensionale Form erkennen?

#### Kabel einer Hängebrücke



Wenn man ein Kabel für eine Hängebrücke erstellt, werden viele Stränge in einer hexagonalen Formierung zusammengefügt und dann zusammengepresst.

Das Diagramm bildet ein Kabel in "Größe 5" ab, das aus 61 Strängen erstellt wurde. Wie viele Stränge braucht man für ein Kabel der Größe 10?

Wie viele für ein Kabel der Größe  $n$ ?

Die Aufgabe *Alhambra Muster* und die Aufgabe *Kabel einer Hängebrücke* sind beide aus dem Swan and Crust (1993) *Mathematics Programmes of Study, inset for Key Stages 3 and 4*, National Curriculum Council, York.

### Nach Struktur suchen

Bitten Sie die Schüler ein Modell einer sichtbaren Struktur zu zeichnen oder zu erstellen.

Sie könnten zum Beispiel Streichhölzer, Knetmasse und Klarsichtfolie verwenden, um ein Modell dieser Diamantkristallstruktur zu erstellen.

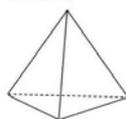
#### Diamantkristall in Matrix



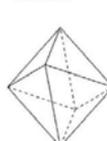
Schau dir die Abbildung eines Diamanten in seiner Gesteinsmatrix an.

Welche Struktur scheint sie zu haben?

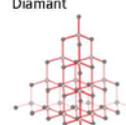
Tetraeder



Oktaeder



Kohlenstoffbindung in einem Diamant



## AKTIVITÄT B: KLASSIFIZIERUNG UND BESTIMMUNG

### Benötigte Zeit - 30 Minuten

Klassifizierung und Bestimmung spielen eindeutig eine große Rolle in der Wissenschaft und Mathematik. Hier sind wir nicht nur mit dem Erlernen der Klassifizierung und Bestimmung, die durch andere entwickelt wurden, konfrontiert, sondern auch mit Schülern, die diesen Prozessen nachgehen, um ein Verständnis zu entwickeln, wie sich wissenschaftliche und mathematische Konzepte ergeben. In diesen Aufgaben untersuchen die Schüler sorgfältig eine Reihe von „Objekten“ und klassifizieren diese nach ihren unterschiedlichen Eigenschaften. Die Schüler selektieren jedes Objekt, unterscheiden zwischen diesem Objekt und anderen ähnlichen Objekten (was ist gleich und was ist anders?) und entwerfen und verwenden Kategorien, um Definitionen zu erstellen. Diese Art von Aufgabe hilft den Schülern gut zu verstehen, was mit verschiedenen Begriffen und Symbolen gemeint ist und den Prozess, wodurch sie entwickelt wurden.

- Arbeiten Sie an einigen Aufgaben auf dem **Handout 2**.
- Welche Art von “Objekten” sollen die Schüler im Klassenraum klassifizieren und bestimmen.
- Versuchen Sie eine Aufgabe zu entwickeln, indem Sie eine dieser Arten für den Gebrauch in Ihrem Klassenzimmer verwenden. Versuchen Sie Beispiele zu finden, die die Schüler dazu zwingen die Eigenschaften der Gegenstände sorgfältig zu betrachten um Diskussionen über Definitionen anzuregen.
- Probieren Sie Ihre Aufgabe aus und berichten Sie in einer späteren Sitzung darüber.

Die Arten von Aufgaben, die hier gezeigt werden, können auf nahezu jeden Kontext erweitert werden. In der Mathematik beispielsweise können Objekte, die beschrieben, bestimmt und klassifiziert werden numerisch, geometrisch oder algebraisch sein. In der Wissenschaft könnten dies Organismen oder Elemente sein. Ihre Aufgabe als Lehrer ist es hier zu versuchen die Auswahl an Möglichkeiten zu untersuchen.

### Ähnlichkeiten und Unterschiede

Anhand der aufgeführten Beispiele könnten die Schüler zum Beispiel zu dem Entschluss kommen, dass das Quadrat nicht zu den anderen passt, weil es einen anderen Umfang hat als die anderen Formen (diese haben denselben Umfang); dass das Rechteck nicht zu den anderen passt, weil es eine andere Fläche aufweist als die anderen usw. Die in Betracht gezogenen Eigenschaften könnten Fläche, Umfang, Symmetrie, Winkel, Konvexität etc. umfassen. Bei den Schattenbildern könnten die Schüler viele Aspekte berücksichtigen: wo die Tiere leben, wie sich bewegen, fortpflanzen etc. Die Teilnehmer sollten versuchen ihre eigenen Beispiele zu entwickeln.

### Eigenschaften und Definitionen

Keine der Eigenschaften definiert alleine das Quadrat. Es ist interessant zu sehen, welche anderen Formen beinhaltet sind, wenn nur eine Eigenschaft betrachtet wird. Wenn die Eigenschaft z.B. „zwei gleiche Diagonale“ ist, dann umfasst dies auch alle Rechtecke und gleichschenkligen Trapeze – aber trifft das in jedem Fall zu? Wenn man zwei gleichzeitig nimmt, dann sind die Ergebnisse nicht so klar. „Vier gleiche Seiten“ und „vier rechte Winkel“ definieren z.B. ein Quadrat aber „Diagonale, die rechtwinklig schneiden“ und „vier gleiche Seiten“ tun das nicht (was könnte das sonst sein?).

### Definitionen erstellen und prüfen

Die Teilnehmer schreiben zu Beginn normalerweise eine eher vage Definition für ein „Polygon“ oder einen „Vogel“ auf. Wie zum Beispiel: „Eine Form mit graden Kanten“ oder ein „Tier, das fliegt“. Dann sehen sie, dass das inadäquat für die gegebenen Beispiele ist. Dies führt sie dazu, dass sie sie gründlicher neu definieren, wie „eine ebene Figur, die durch einen geschlossenen Pfad oder Kreis begrenzt und aus einer endlichen Folge von graden Linienabschnitten zusammengesetzt ist“. Etwas zu bestimmen ist ein schwieriges Feld und die Schüler sollten realisieren, dass es widersprüchliche Definitionen für denselben Gedanken gibt (wie „Dimension“ zum Beispiel).

### Klassifizieren in einer Kreuztabelle

Kreuztabellen sind nicht die einzigen Darstellungsmöglichkeiten, die man verwenden kann. Die Teilnehmer können andere vorschlagen. Venn- und Baumdiagramme sind nur 2 Beispiele, die in der Wissenschaft und in der Mathematik verwendet werden.

## Handout 2: Klassifizierung und Bestimmung

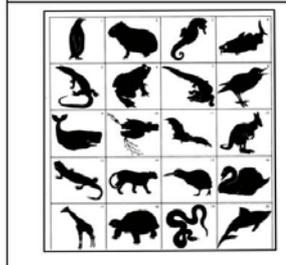
### Ähnlichkeiten und Unterschiede

Zeigen Sie den Schülern drei Objekte.  
 "Welches passt nicht zu den anderen?"  
 "Beschreibe Eigenschaften, die zwei Objekte teilen und das dritte nicht."  
 "Suche ein anderes Objekt aus den dreien aus und begründe, dass es sich von den anderen unterscheidet."

(a) (b) (c)

(a)  $y = x^2 - 6x + 8$   
 (b)  $y = x^2 - 6x + 9$   
 (c)  $y = x^2 - 6x + 10$

Zeigen Sie den Schülern einige Schattenbilder von Tieren.  
 "Kannst du die Tiere benennen?"  
 "Schneide die 20 Karten aus und ordne die Tiere in Gruppen ein."  
 "Schreibe die Kriterien auf, nach denen du die Gruppen erstellt hast."  
 "Stell deine Gruppen einem anderen Schüler vor. Können sie eure Gruppierungskriterien herausfinden?"



### Eigenschaften und Definitionen

Zeigen Sie den Schülern ein Objekt.  
 "Betrachte dieses Objekt und notiere dir all seine Eigenschaften."  
 "Bildet irgendeine *einzig*e Eigenschaft eine *Definition* des Objekts? Wenn nicht, welches andere Objekt besitzt diese Eigenschaft?"  
 "Welche Eigenschaftspaare bilden eine Definition und welche Paare nicht?"

Vier gleiche Seiten  
 Zwei Paare paralleler Seiten  
 Zwei gleiche Diagonale  
 Diagonalen schneiden sich rechtwinklig  
 Vier Symmetrie-Achsen  
 Rotationsymmetrie 4. Ordnung  
 Vier rechte Winkel

"Schau dir das Tier an und schreibe all seine Eigenschaften auf."  
 "Bestimmt irgendein *einzig*es Merkmal den Vogel eindeutig? Wenn nicht, welches andere Tier weist dieses Merkmal/diese Eigenschaft auf?"  
 "Welche Eigenschaftspaare würden den Vogel eindeutig beschreiben? Welche Paare nicht?"

Zwei Beine  
 Klauen  
 Schwanz  
 Schnabel  
 Federn  
 Runder Körper

### Eine Definition erstellen und prüfen

Bitte Sie die Schüler die Definition eines Polygons aufzuschreiben oder einen anderen mathematischen Begriff dafür zu finden.

"Ändert Definitionen ab und versucht sie zu verbessern."

Zeigen Sie den Schülern eine Auswahl an Objekten.

"Verwende deine Definition, um die Objekte zu ordnen."  
 "Verbessere nun deine Definitionen."

Bitte Sie die Schüler eine Beschreibung eines Vogels oder von einem anderen Tier oder einer Pflanze aufzuschreiben.

"Ändert Beschreibungen ab und versucht sie zu verbessern."

Bitte Sie die Schüler Schattenbilder einiger Tiere zu betrachten.

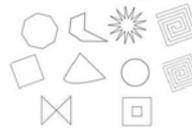
"Entscheide welche dieser Tiere als "Vogel" bezeichnet werden kann, wenn du dich nur an deine Beschreibung hältst."  
 "Verbessere nun deine Definitionen."

### Klassifizierung in einer Kreuztabelle

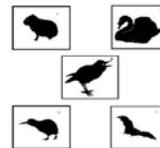
Geben Sie den Schülern eine Kreuztabelle, um eine Auswahl an Objekten einzuordnen.

"Entwerfe deine eigenen Objekte und füge diese in der Tabelle hinzu."  
 "Versuche zu begründen, warum es unmöglich ist bestimmte Spalten zu besetzen."

Welches dieser Objekte ist nach deiner Definition ein Polygon?



Welches dieser Abbildungen ist nach deiner Beschreibung ein Vogel?



	No rotational symmetry	Rotational symmetry	
No lines of symmetry			Existiert ein Objekt ohne Rotationsymmetrie aber mit zwei Symmetrieachsen?
One or two lines of symmetry			
More than two lines of symmetry			

(The silhouettes of animals are taken from Nuffield-Chelsea Curriculum Trust, 1987).

## AKTIVITÄT C: DARSTELLEN UND ÜBERSETZEN

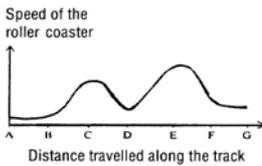
**Benötigte Zeit: 20 Minuten**

Mathematische und wissenschaftliche Konzepte haben viele Darstellungsmöglichkeiten; Worte, Diagramme, algebraische Symbole, Tabellen, Graphen usw. Für die Schüler ist es von großer Bedeutung diese Darstellungsmöglichkeiten fließend „sprechen“ zu lernen und zwischen diesen zu übersetzen. Es ist hilfreich, jede Zelle unten in der Tabelle als einen Übersetzungsprozess zu verstehen. Einige Übersetzungen sind gängiger als andere im Unterricht. Zum Beispiel bitten wir die Schüler oftmals zwischen Tabellen und Graphen zu wechseln. Das nennt man „zeichnen“.

von\zu	Worte	Abbildungen	Tabellen	Graphen	Formeln
<b>Worte</b>					
<b>Abbildungen</b>					
<b>Tabellen</b>				zeichnen	
<b>Graphen</b>					
<b>Formeln</b>					

- Welche Darstellungsmöglichkeiten verwenden Sie am häufigsten im Unterricht?
- Auf welche Übersetzungsprozesse legen Sie am meisten Wert? Welche beachten Sie eher weniger?
- Besprechen Sie die Beispiele auf **Handout 3**.

Wenn die Teilnehmer an den Aufgaben arbeiten, könnten sie realisieren, dass einige von ihnen in ihrem Unterricht weniger verbreitet sind. Zu jeder Aufgabe sind im Folgenden einige Informationen angegeben:

<p><b>Arbeitszeiten</b> Die Wörter beschreiben ein umgekehrtes Verhältnis, genau wie folgendes.</p> <table border="1" data-bbox="193 1319 783 1413"> <thead> <tr> <th>Anzahl der Leute</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>6</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Benötigte Zeit in Stunden</td> <td>24</td> <td>12</td> <td>8</td> <td>6</td> <td>4.8</td> <td>4</td> </tr> </tbody> </table>	Anzahl der Leute	1	2	3	4	5	6	Benötigte Zeit in Stunden	24	12	8	6	4.8	4	<p><b>Achterbahn</b> Ein passender Graph ist unten abgebildet. Es ist interessant zu sehen, wie schwer dies einige Schüler finden, besonders wenn sie den Graphen falsch, als eine Abbildung einer Situation, interpretieren.</p> 																						
Anzahl der Leute	1	2	3	4	5	6																															
Benötigte Zeit in Stunden	24	12	8	6	4.8	4																															
<p><b>Wörter und Formeln</b></p> $n \rightarrow \frac{2n+6}{2} - n = 3$ <p>Die Schüler haben Spaß daran diese zu bilden und sie so schwer wie möglich zu stellen!</p>	<p><b>Tabellen und Graphen</b></p> <p>Dieses besondere Beispiel konzentriert sich eher auf das Zeichnen von Graphen.</p>																																				
<p><b>Turnier</b></p> $m = n(n-1)$ <p>Das Diagramm zeigt die Struktur der Situation. Es gibt <math>n^2 - n</math> Zellen.</p> <table border="1" data-bbox="501 1688 730 1912"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>A</th> <td style="background-color: black;"></td> <td>AvB</td> <td>AvC</td> <td>AvD</td> <td>AvE</td> </tr> <tr> <th>B</th> <td>BvA</td> <td style="background-color: black;"></td> <td>BvC</td> <td>BvD</td> <td>BvE</td> </tr> <tr> <th>C</th> <td>CvA</td> <td>CvB</td> <td style="background-color: black;"></td> <td>CvD</td> <td>CvE</td> </tr> <tr> <th>D</th> <td>DvA</td> <td>DvB</td> <td>DvC</td> <td style="background-color: black;"></td> <td>DvE</td> </tr> <tr> <th>E</th> <td>EvA</td> <td>EvB</td> <td>EvC</td> <td>EvD</td> <td style="background-color: black;"></td> </tr> </tbody> </table>		A	B	C	D	E	A		AvB	AvC	AvD	AvE	B	BvA		BvC	BvD	BvE	C	CvA	CvB		CvD	CvE	D	DvA	DvB	DvC		DvE	E	EvA	EvB	EvC	EvD		<p><b>Pinguine</b></p> <p>Das Gewicht ist proportional zum Volumen, dann sollte die dimensionale Analyse berücksichtigen, dass Gewicht proportional zu der Würfelgröße ist, wenn die Pinguine geometrisch ähnlich sind. Dies scheint eine vernünftige Vermutung zu sein und ein angemessenes Model wäre:</p> $w = 20 h^3$ <p>wobei <math>h</math> die Größe in Metern ist, und <math>w</math> das Gewicht in kg.</p>
	A	B	C	D	E																																
A		AvB	AvC	AvD	AvE																																
B	BvA		BvC	BvD	BvE																																
C	CvA	CvB		CvD	CvE																																
D	DvA	DvB	DvC		DvE																																
E	EvA	EvB	EvC	EvD																																	

## Handout 3: Zwischen Darstellungen übersetzen

### Übersetzung von Darstellungen

#### Worte und Tabellen

Die Schüler sollen eine Tabelle mit Werten erstellen, nachdem ihnen mündlich eine Situation gegeben wurde.

Die Schüler sollen danach die Tabelle und das was sie aussagt in ihren eigenen Worten beschreiben.

#### Abbildungen und grafische Darstellungen

Nachdem den Schülern ein Bild von einer Situation gezeigt wurde, sollen sie sich vorstellen, wie sich die Situation mit der Zeit entwickeln könnte und ein Diagramm dazu entwerfen.

Die Schülern sollen nach betrachten eines Diagrammes ein übereinstimmendes Bild der Situation entwerfen.

#### Worte und Formeln

Die Schüler sollen eine "sich eine Zahl vorstellen" ähnliche Problemstellung überlegen und dadurch erklären, warum es funktioniert. Die Schüler erfinden eine algebraische Identität und entwickeln dann eine "sich eine Zahl vorstellen"-Problemstellung, um es zu verstehen.

#### Tabellen und grafische Darstellungen

Die Schüler sollen ein Diagramm aus einer gegebenen Datentabelle erstellen ohne zu zeichnen.

Die Schüler denken sich eine Tabelle mit Daten aus, das mit einem vorgegebenem Diagramm übereinstimmen würde.

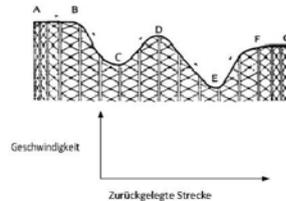
#### Arbeitszeiten

Erstelle eine Tabelle, um dieses Verhältnis darzustellen:  
"Wenn wir die Anzahl der Leute auf der Arbeit verdoppeln, werden wir die benötigte Zeit, um die Arbeit zu erledigen, halbieren."

Anzahl der Leute	1	2	3	4	5	6
Benötigte Zeit in Stunden						

#### Achterbahn

Zeichne ein Diagramm, um die Geschwindigkeit der Achterbahn während der Fahrt, darzustellen.



#### Sich eine Zahl vorstellen

"Stell dir eine Zahl vor. Verdopple sie. Addiere 6 dazu. Teile sie durch 2. Ziehe davon nun die Zahl ab, an die du zuerst gedacht hast. Zeige, dass die Antwort immer 3 ist."

Entwurf dein eigenes Beispiel.

#### Lebenserwartung

Erstelle ein Diagramm und trage die Daten ein.

Age (yrs)	Number of survivors	Age (yrs)	Number of survivors
0	1000	50	913
5	979	60	808
10	976	70	579
20	972	80	248
30	963	90	32
40	950	100	1



© 2010 Centre for Research in Mathematics Education University of Nottingham

### Übersetzung von Darstellungen (Fortsetzung)

#### Tabellen und Formeln

Nachdem den Schülern eine Datentabelle vorgelegt wurde, sollen sie nach einer allgemeinen Regel suchen, die sie bestimmt.

Die Schüler verwenden diese Regel, um Vorhersagen zu treffen.

#### Formeln und Graphen

Die Schüler sollen die Punkte in einer Tabelle graphisch darstellen und versuchen eine algebraische Funktion zu finden, das zur Methode datenbasiertem versuchen und verbessern passt.

Dies erfordert, dass man zwischen den Graphen und Formeln hin und her übersetzt, indem man wertvolle Erkenntnisse über die Formen verschiedener Funktionen ansammelt.

#### Turniere

Die Tabelle zeigt die Anzahl der Spiele ( $m$ ), die man für ein Turnier braucht, bei dem jedes Team jedes Team zwei Mal gegeneinander spielt. Finde eine Formel, die das Verhältnis zwischen der Anzahl der Teams ( $n$ ) und der Anzahl der Spiele ( $m$ ) beschreibt.

Anzahl der Teams ( $n$ )	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl der Spiele ( $m$ )	2	6	12	20	30	42	56

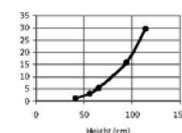
Verwende deine Formel, um neue Einträge in der Tabelle zu prognostizieren.  
(Z.B.: Wie viele Spiele brauchen 20 Teams?)

#### Pinguine

Versuche eine passende Funktion der Form  $y = ax^2$  zu dem Graphen, der die Durchschnittsgröße und das Durchschnittsgewicht von 5 Pinguinarten vorweist, zu finden.

Prognostiziere das Gewicht eines bereits ausgestorbenen Pinguins, dessen Größe auf 150 cm geschätzt wurde.

	Height (cm)	Weight (kg wt.)
Kaiserpinguin	114	29.48
Königspinguin	94	15.88
Gelbaugenpinguin	65	5.44
Dickschnabelpinguin	56	3.18
Zwergpinguin	41	1.13



Roller coaster and Life Expectancy were taken from Swan (1985) *The Language of Functions and Graphs*, Shell Centre for Mathematical Education/Joint Matriculation Board. *Tournaments* was adapted from Swan (1983) *Problems with Patterns and Numbers*, Shell Centre for Mathematical Education/Joint Matriculation Board. These examples also appeared in Swan and Crust (1993) *Mathematics Programmes of Study, Inset for Key Stages 3 and 4*, National Curriculum Council, York.

## AKTIVITÄT D: BEZIEHUNGEN HERSTELLEN

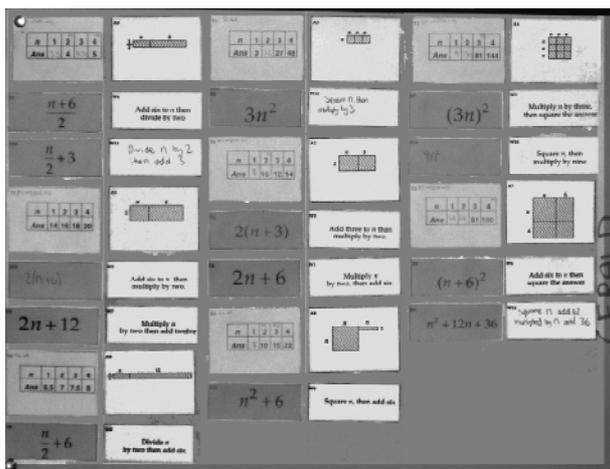
**Benötigte Zeit: 20 Minuten**

Die Aufgabe in **Handout 4** beabsichtigt Schüler dazu aufzufordern Beziehungen zwischen verbalen, numerischen, räumlichen und algebraischen Darstellungen zu reden. Die Teilnehmer sollten an der folgenden Aufgabe in Paaren oder zu dritt arbeiten. Sie sollen mit dem Ausschneiden der Karten beginnen.

- Schneide das Kartenset auf **Handout 4** aus.
- Wechselt euch ab, das passende Paar von Kartenset A: *algebraische Ausdrücke* mit dem Kartenset B: *verbale Beschreibungen* zu finden. Legt Kartenpaare nebeneinander offen auf den Tisch. Wenn ihr der Meinung seid, dass Karten fehlen, entwerft selbst welche.
- Als nächstes findet das passende Paar für das Kartenset C: *Tabellen* zu den Karten, die schon zusammenpassen. Es könnte sich herausstellen, dass eine Tabelle zu mehr als einem algebraischen Ausdruck passt. Wie kannst du dich selbst oder deine Schüler davon überzeugen, dass das immer richtig sein wird, egal welchen Wert  $n$  hat?
- Als nächstes findet das passende Paar für das Kartenset D: *Flächen* zu den Karten, die schon zusammengruppiert sind.
- Wie helfen dir diese Karten zu erklären, warum verschiedene algebraische Ausdrücke äquivalent sind?
- Besprecht die Schwierigkeiten, die eure Schüler mit dieser Aufgabe haben könnten.

Das endgültige Resultat kann auf einem Poster dargestellt werden, wie hier rechts abgebildet.

Die nächste Aufgabe ermutigt die Teilnehmer ihr eigenes Denken mit einer Folge von Lernprozessen im Unterricht zu vergleichen. Die Schüler auf dem 5-minütigen Videoclip sind schwächere Schüler zwischen 16-17 Jahren, die vorher sehr wenig Verständnis für Algebra hatten.



- Schauen Sie sich den **Videoclip** an.
- Welche Schwierigkeiten haben die Schüler, während sie an dieser Aufgabe arbeiten?
- Wie hilft der Lehrer den Schülern?

Zum Schluss könnten die Teilnehmer beginnen darüber nachzudenken, wie sie diese Art von Aufgabe auf die Darstellungsmöglichkeiten, die sie unterrichten beziehen können.

- Entwerfen Sie Ihr eigenes Kartenset, das Ihren Schülern dabei helfen wird, zwischen den verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten, die Sie unterrichten zu übersetzen.

## Handout 4: Darstellung und Herstellung von Beziehungen

Jede Gruppe an Schülern erhält ein Kartenset. Sie sollen die Karten in Sets sortieren, sodass jedes Kartenset eine gleichwertige Bedeutung vorweist. Wenn sie das gemacht haben, sollen sie erklären, woher sie wissen, dass die Karten äquivalent sind. Sie entwerfen für sich auch Karten, die fehlen. Die Karten sind erstellt worden, um die Schüler dazu zu zwingen allgemein irritierende Darstellungen zu erkennen.

Kartenset A: Algebraische Beschreibung

E1	$\frac{n+6}{2}$	E2	$3n^2$
E3	$2n+12$	E4	$2n+6$
E5	$2(n+3)$	E6	$\frac{n}{2}+6$
E7	$(3n)^2$	E8	$(n+6)^2$
E9	$n^2+12n+36$	E10	$3+\frac{n}{2}$
E11	$n^2+6$	E12	$n^2+6^2$
E13		E14	

Kartenset B: Verbale Beschreibungen

W1	Multipliziere $n$ mit zwei, addiere dann sechs dazu.	W2	Multipliziere $n$ mit drei, quadriere dieses Ergebnis anschließend
W3	Addiere sechs mit $n$ , dann multipliziere mit zwei.	W4	Addiere sechs mit $n$ , dann dividiere durch zwei.
W5	Addiere drei mit $n$ , dann multipliziere mit zwei.	W6	Addiere sechs mit $n$ , dann quadriere das Ergebnis
W7	Multipliziere $n$ mit zwei, addiere dann zwölf dazu.	W8	Dividiere $n$ durch zwei, addiere dann sechs dazu.
W9	Quadriere $n$ , addiere dann sechs dazu.	W10	Quadriere $n$ , multipliziere dann mit neun.
W11		W12	
W13		W14	

Kartenset C: Tabellen

T1	<table border="1"> <tr><td><math>n</math></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td><b>Ans</b></td><td>14</td><td>16</td><td>18</td><td>20</td></tr> </table>	$n$	1	2	3	4	<b>Ans</b>	14	16	18	20	T2	<table border="1"> <tr><td><math>n</math></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td><b>Ans</b></td><td></td><td></td><td>81</td><td>144</td></tr> </table>	$n$	1	2	3	4	<b>Ans</b>			81	144
$n$	1	2	3	4																			
<b>Ans</b>	14	16	18	20																			
$n$	1	2	3	4																			
<b>Ans</b>			81	144																			
T3	<table border="1"> <tr><td><math>n</math></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td><b>Ans</b></td><td></td><td>10</td><td>15</td><td>22</td></tr> </table>	$n$	1	2	3	4	<b>Ans</b>		10	15	22	T4	<table border="1"> <tr><td><math>n</math></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td><b>Ans</b></td><td>3</td><td></td><td>27</td><td>48</td></tr> </table>	$n$	1	2	3	4	<b>Ans</b>	3		27	48
$n$	1	2	3	4																			
<b>Ans</b>		10	15	22																			
$n$	1	2	3	4																			
<b>Ans</b>	3		27	48																			
T5	<table border="1"> <tr><td><math>n</math></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td><b>Ans</b></td><td></td><td></td><td>81</td><td>100</td></tr> </table>	$n$	1	2	3	4	<b>Ans</b>			81	100	T6	<table border="1"> <tr><td><math>n</math></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td><b>Ans</b></td><td></td><td>10</td><td>12</td><td>14</td></tr> </table>	$n$	1	2	3	4	<b>Ans</b>		10	12	14
$n$	1	2	3	4																			
<b>Ans</b>			81	100																			
$n$	1	2	3	4																			
<b>Ans</b>		10	12	14																			
T7	<table border="1"> <tr><td><math>n</math></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td><b>Ans</b></td><td></td><td>4</td><td></td><td>5</td></tr> </table>	$n$	1	2	3	4	<b>Ans</b>		4		5	T8	<table border="1"> <tr><td><math>n</math></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td><b>Ans</b></td><td>6.5</td><td>7</td><td>7.5</td><td>8</td></tr> </table>	$n$	1	2	3	4	<b>Ans</b>	6.5	7	7.5	8
$n$	1	2	3	4																			
<b>Ans</b>		4		5																			
$n$	1	2	3	4																			
<b>Ans</b>	6.5	7	7.5	8																			

Kartenset D: Flächen

A1		A2	
A3		A4	
A5		A6	

Swan, M. (2008), *A Designer Speaks: Designing a Multiple Representation Learning Experience in Secondary Algebra*. Educational Designer: Journal of the International Society for Design and Development in Education, 1(1), article 3.

Swan, M. (2008), *A Designer Speaks: Designing a Multiple Representation Learning Experience in Secondary Algebra*. Educational Designer: Journal of the International Society for Design and Development in Education, 1(1), article 3.

## AKTIVITÄT E: SCHÄTZEN

### **Benötigte Zeit: 20 Minuten.**

Probleme beim Schätzen zwingen Schüler Vermutungen aufzustellen, dann mit diesen Vermutungen zu arbeiten, um eine Reihe von Argumentationen aufzubauen. Es trifft meistens der Fall zu, dass die Schüler sich nicht dazu in der Lage fühlen solche Probleme alleine anzugehen. Wenn sie zusammenarbeiten, sind sie überrascht, wie viel Wissen sie aufbauen können.

- Arbeiten Sie am Baumproblem auf **Handout 5** zu zweit oder in kleinen Gruppen zusammen.
- Wenn jede Gruppe eine begründete Antwort gefunden hat, mischen Sie die Gruppe und erklären und beschreiben Sie ihre Lösungen und all Ihre Vermutungen.
- Bei welcher Lösung sind Sie am zuversichtlichsten? Warum?

Folgendes ist ein Ansatz, den Lehrer übernommen haben:

1. Schätze, wie viele Lehrer es in deinem Land gibt.
2. Schätze, wie groß eine durchschnittliche Familie ist.
3. Schätze die Größe einer typischen Zeitung.
4. Angenommen jede Familie kauft jeden Tag eine Zeitung, schätze die totale Menge Papier, die pro Tag gebraucht werden.
5. Schätze den Radius und die Größe eines passenden Baumes ein, den man weiterverwenden kann.
6. Berechne das Volumen des Baumstammes.
7. Angenommen, das ganze Volumen des Baumstammes wird in Zeitungspapier verwendet; verwende deine Antworten aus (4) und (6), um die Anzahl der benötigten Bäume zu schätzen.

Die folgenden Angaben sind von der Forstverwaltung und könnten eine nützliche unabhängige Kontrolle bieten:

"Das Beispiel nimmt an, dass der ganze Baum für Papier verwendet wird. In der Realität wird nur das kleine Ende verwendet. Aus ca. 2,8kg Holz kann man etwa 1 kg Zeitungspapier herstellen. 1 Kubikmeter Holz, das frisch gefällt wurde und in ein Faserstoffwerk geliefert wird, wiegt etwa 920 kg. Wir gehen von einer Sitka-Fichte aus. Zu dem Zeitpunkt, wenn der Baum gefällt wird ist er 55 Jahre alt und jeder Baum wird da ein Volumen von 0,6 Kubikmetern haben, die Rinde mit inbegriffen. Der Durchmesser bei 1,4 Metern Höhe vom Boden aus wären 27 cm."

- Erstellen Sie eine Liste von Schätzfragen, die sich für Ihre Klasse eignet.
- Besprechen Sie, wie man einen Unterricht planen könnte, der sich mit dem Schätzproblem beschäftigen soll.

Ein möglicher Fragenkatalog wäre z.B.:

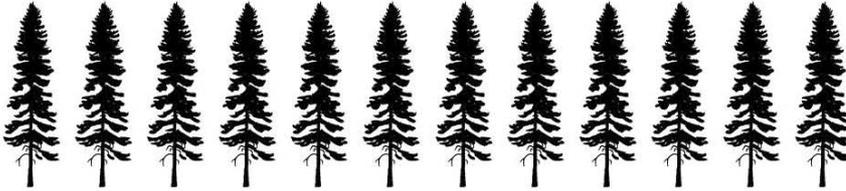
- Wie viel trinkst du in einem Jahr?
- Wie viele Lehrer gibt es in deinem Land?
- Wie lange bräuchtest du, um von eins bis eine Million zu zählen? Würde das in anderen Sprachen genau so lang dauern?
- Wie viele Leute können in deinem Klassenzimmer gemütlich stehen?
- Wie oft schlägt das Herz eines Menschen im Jahr?
- Wie viele Arbeitshefte füllst du in deiner Schulkarriere aus?
- Wie viel Hunde (als Haustier) gibt es in deiner Stadt?

## Handout 5 Schätzen

Arbeiten Sie an folgenden Problemstellungen zusammen.

### Bäume

Wie viele Bäume braucht man täglich, um dein Land mit Zeitungen zu versorgen.



Versuche eine angemessene Schätzung, die auf Fakten basiert, die dir bereits bekannt sind, vorzunehmen.

Um dieses Problem zu lösen, mussten Sie Vermutungen aufstellen und eine Reihe von Argumenten aufbauen.

Erstellen Sie eine Liste von Schätzfragen, die sich für Ihre eigene Klasse eignet.

## AKTIVITÄT F: MESSUNG UND QUANTIFIZIERUNG

**Benötigte Zeit: 20 Minuten.**

In unserer Gesellschaft erstellt und verwendet man die ganze Zeit Maße. Wir erstellen Maße für fundamentale Konzepte (z.B. Länge, Zeit, Masse, Gefälle, Geschwindigkeit, Dichte) und für komplexere soziale Konstrukte (z.B. akademische Fähigkeit, Wohlstand, Inflation, Arbeitsleistung, Bildungsqualität, sportliche Fähigkeiten, körperliche Schönheit). Wissenschaftler und Mathematiker erfinden Maße, um nach Mustern, Beziehungen und Gesetzen zu suchen. Politiker nutzen Maße, um zu überwachen und zu kontrollieren. Alle gebildeten Bürger sollten realisieren, dass viele dieser Maßnahmen offenstehen, um kritisiert und verbessert zu werden.

- Welche Maße begegnen Ihnen in Ihrem Alltag? Erstellen Sie eine Liste auf **Handout 6**.
- Mit welchen Messmethoden haben Ihre Schüler schon Erfahrungen gesammelt?

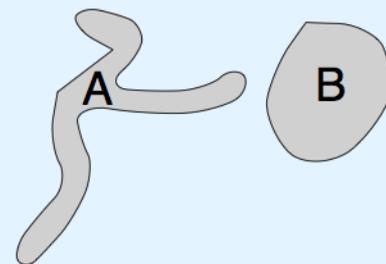
Auf **Handout 6**, werden den Schülern zwei Aktivitäten vorgeschlagen.

- Arbeiten Sie an der Aufgabe *Steigung messen* zusammen.
- Versuchen Sie eine überzeugende Erklärung zu finden, warum  $\text{Höhe der Stufe} \div \text{Länge der Stufe}$  eine bessere Messmethode für die Steigung ist.
- Fallen Ihnen andere Beispiele für alternative Messmethoden für dasselbe Konzept ein?

Das Verhältnis  $\text{Höhe der Stufe} \div \text{Länge der Stufe}$  ist besser als die Differenz  $\text{Höhe der Stufe} - \text{Länge der Stufe}$ , weil das Verhältnis dimensionslos ist. Das bedeutet, dass das Verhältnis sich nicht ändern wird, wenn man die Treppe geometrisch vergrößern würde, wohingegen dies bei der Differenz geschehen würde.

Die letzte Aufgabe regt an, Messmethoden für eine alltägliche Erscheinung zu erfinden. Die Teilnehmer könnten damit anfangen, indem sie über "Kompaktheit" nachdenken:

Geographen haben in den letzten Jahren versucht Wege zu finden, um die Form einer Landfläche zu definieren. Sie haben insbesondere versucht eine Messmethode für "Kompaktheit" zu erfinden. Du könntest intuitive einige Vorstellungen darüber haben, was "kompakt" bedeutet. Auf der Abbildung rechts sind zwei Inseln zu sehen. Insel B ist kompakter als Insel A. „Kompaktheit“ hat nichts mit der Größe der Insel zu tun. Man kann kleine kompakte und große kompakte Inseln haben.



- Zeichnen Sie einige Formen und sortiert sie nach Kompaktheit.
- Versuchen Sie sich untereinander zu einigen, was der Begriff bedeutet.
- Ist  $\text{Fläche} \div \text{Umfang}$  eine gute Messmethode für Kompaktheit? Warum oder warum nicht?
- Versuchen Sie verschiedene Wege zu finden, um Kompaktheit zu messen. Versuchen Sie Ihre Messbereich von 0 bis 1 gehen zu lassen, wobei 1 eine Form ist, die perfekt kompakt ist.
- Vergleichen Sie Ihre Ideen im Anschluss mit denen der Geographen auf **Handout 7**.
- Überlegen Sie sich am Ende andere alltäglichen Erscheinungen und denken Sie darüber nach, wie Sie diese messen würdet (Gehen Sie zurück auf Handout 6)

## Handouts 6 und 7 Messung und Quantifizierung

**Welchen Maßen begegnen Ihre Schüler in ihrem Alltagsleben?**

Erstellen Sie eine Liste:

**Mögliche Aufgaben für Schüler:**

**Maße vergleichen**

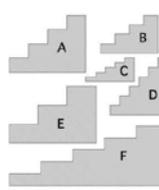
Zeigen Sie den Schülern zwei Möglichkeiten, um etwas zu messen. Bitten Sie die Schüler diese miteinander zu vergleichen und zu sagen, warum die eine besser ist als die andere.

**Steigung messen**

Ordne diese Treppen nach ihrer Steilheit.

Ist Stufenhöhe minus Stufenlänge eine gute Messmethode?

Warum ist Stufenhöhe geteilt durch Stufenlänge



**Möglichkeiten erstellen**

Bitten Sie die Schüler eine Möglichkeit zu erfinden um eine alltägliche Erscheinung zu messen und diese dann anzuwenden.

Wie würdest du folgendes messen:

- die "Kompaktheit" einer geometrischen Form?
- die "Klebrigkeit" eines Klebebandes?
- die "Biegsamkeit" eines Flusses?
- die "Problematik" einer Kurve in der Straße?
- die "Kondition" einer Person?

**Kompaktheit messen**

Wenn man zwei ähnliche Formen unterschiedlicher Größe miteinander vergleicht, kann man die Inadäquatheit des Gebrauchs von  $Fläche \div Umfang$  als Maß für Kompaktheit sehen.

Stellen wir uns ein Quadrat mit einer Seitenlänge von zwei Einheiten und ein Quadrat mit einer Seitenlänge von drei Einheiten vor. Wir würden sagen, dass sie dieselbe Kompaktheit aufweisen, da beide Quadrate sind aber wenn man Verhältnis  $Fläche \div Umfang$  verwendet, wären ihre Maße unterschiedlich:  $4/8 = 0.5$  und  $9/12 = 0.75$ .

Wir könnten dieses Maß abwandeln, um es dimensionslos zu machen, indem wir folgende Formel verwenden:  $C = \frac{a}{p^2}$ ,

wobei  $a$  = Fläche und  $p$  = Umfang ist. Dies würde für beide Quadrate den Wert  $1/16$  ergeben. Dieses Verhältnis nimmt einen maximalen Wert an, wenn die Form rund ist. In diesem Fall,

$$C = \frac{\pi r^2}{(2\pi r)^2} = \frac{1}{4\pi}$$

Um die Maße zwischen 0 und 1 liegen zu lassen, könnten wir das Maß skalieren, indem wir mit  $4\pi$  multiplizieren. Dies wird von Geographen verwendet und „Circularity ratio“ (Selkirk, 1982) genannt:

„Circularity ratio“  

$$C_1 = \frac{4\pi a}{p^2}$$
 where  $a$  = area;  $p$  = perimeter of the shape

Ein Kritikpunkt an dieser Maßregel ist, dass es schwierig ist  $p$  zu definieren und zu berechnen, wenn man sehr große, unregelmäßige Grenzen wie Länder oder Flussgebiete messen will. Andere mögliche Maßregeln sind folgende auch von Selkirk:

**Verhältnis der Form**

$$C_2 = \frac{4a}{\pi l^2}$$
  $a$ =Fläche;  $l$ =Strecke zwischen den am weitesten voneinander getrennten Punkten

**Verhältnis der Kompaktheit**

$$C_3 = \frac{a}{\pi R^2}$$
  $a$ =Fläche;  $R$ =Radius des kleinsten Kreises, welcher die Form umschließt

**Verhältnis des Radius**

$$C_4 = \frac{r}{R}$$
  $r$ =Radius des größten Kreises, welcher in die Form passt  
 $R$ =Radius des kleinsten Kreises, welcher die Form umschließt

Reference: Selkirk, K (1982) *Pattern and Place - An Introduction to the Mathematics of Geography*, Cambridge University Press.

## AKTIVITÄT G: EVALUIERUNG DER AUSSAGEN, ERGEBNISSE UND ARGUMENTE

Schüler, die aktiv lernen, stellen ständig Hypothesen und Vermutungen anderer in Frage. Die Aufgaben, die hier vorzufinden sind, sind alle dafür gedacht dieses Verhalten zu fördern.

Bitte Sie die Teilnehmer in Gruppen von zwei oder drei an der Aufgabe auf **Handout 7** zu arbeiten.

Bei dieser Aufgabe, wird Ihnen eine Auswahl an Aussagen gegeben.

- Entscheiden Sie, ob die Aussagen wahr sind und begründen Sie Ihre Entscheidungen. Um die Aussagen zu bekräftigen oder zu widerlegen, sollten Ihre Erklärungen eigene Beispiele und Gegenbeispiele enthalten.
- Desweiteren kann man Bedingungen hinzufügen oder die Aussagen revidieren, sodass sie „immer wahr“ werden.
- Erstellen Sie einige Aussagen, die eine anregende Diskussion in Ihrer Klasse hervorrufen wird.

Diese Arten von Aufgaben sind sehr mächtig. Die Aussagen könnten dazu vorbereitet werden die Schüler zu fördern mit allgemeinen Missverständnissen und Fehlern konfrontiert zu werden und diese zu diskutieren. Die Aufgabe des Lehrers ist es die Schüler aufzufordern Rechtfertigungen, Beispiele und Gegenbeispiele anzubieten, wie zum Beispiel:

### **Gehaltserhöhung:**

"OK du denkst, dass das manchmal wahr ist, was davon abhängt, was Max und Jim verdienen. Kannst du mir ein Beispiel nennen, wo Jim eine höhere Gehaltserhöhung erhält? Kannst du mir ein Beispiel geben, wo beide dieselbe Gehaltserhöhung bekommen?"

### **Fläche und Umfang:**

"Kannst du mir ein Beispiel von einem Schnitt geben, das den Umfang vergrößern und die Fläche verkleinern würde?"

"Angenommen ich nehme einen Bissen von diesem dreieckigen Sandwich. Was passiert mit seiner Fläche und seinem Umfang?"

### **Rechte Winkel:**

Kannst du *beweisen*, dass das immer wahr ist?

### **Größere Brüche:**

Denkst du, dass das immer zutrifft? Kannst du mir ein Diagramm zeichnen, um es mir zu beweisen? Was passiert, wenn du mit einem Bruch beginnst, das größer als eins ist?

## Handout 7: Immer, manchmal oder niemals wahr?

<p style="text-align: center;"><b>Gehaltserhöhung</b></p> <p>Max erhält eine Gehaltserhöhung von 30%.            Jim erhält eine Gehaltserhöhung von 25%.            Also erhält Max eine höhere Gehaltserhöhung.</p>	<p style="text-align: center;"><b>Schlussverkauf</b></p> <p>In einem Schlussverkauf, wurde jeder Preis um 25% gesenkt. Nach dem Schlussverkauf wurde jeder Preis um 25% erhöht. Also gingen die Preise auf den Anfangspreis zurück.</p>
<p style="text-align: center;"><b>Fläche und Umfang</b></p> <p>Wenn man ein Stück einer Form abschneidet, verkleinert man seine Fläche und Umfang.</p>	<p style="text-align: center;"><b>Rechter Winkel</b></p> <p>Ein Fünfeck hat weniger rechte Winkel als ein Rechteck.</p>
<p style="text-align: center;"><b>Geburtstage</b></p> <p>In einer Klasse mit zehn Schülern ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Schüler am selben Tag in einer Woche Geburtstag haben eins.</p>	<p style="text-align: center;"><b>Lotterie</b></p> <p>In einer Lotterie werden diese sechs Zahlen            3, 12, 26, 37, 44, 45            eher gezogen als diese sechs Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6.</p>
<p style="text-align: center;"><b>Größere Brüche</b></p> <p>Wenn im Zähler und Nenner eines Bruchs dieselbe Zahl steht, vergrößert sich der Wert des Bruches.</p>	<p style="text-align: center;"><b>Kleinere Brüche</b></p> <p>Wenn man den Zähler und den Nenner mit derselben Zahl dividiert, verkleinert sich der Wert des Bruches.</p>
<p style="text-align: center;"><b>Quadratwurzeln</b></p> <p>Die Quadratwurzel einer Zahl ist kleiner oder genauso groß wie die Zahl.</p>	<p style="text-align: center;"><b>Zahlenreihe</b></p> <p>Wenn der Grenzwert einer Folge von Termen einer unendlichen Reihe gleich Null ist, so ist auch die Summe der Reihen gleich Null.</p>

## AKTIVITÄT H: EXPERIMENTIEREN UND CONTROLLING DER VARIABLEN

**Benötigte Zeit: 40 Minuten.**

Hier werden 2 Aufgaben vorgestellt. Die eine besteht darin ein Experiment zu planen und die andere beinhaltet ein Computerapplet, das in dieser Einheit vorgestellt wird.

Beginnen Sie, indem über die ersten beiden Situationen auf **Handout 8** diskutiert wird.

- Suchen Sie sich eine der wissenschaftlichen Fragen aus, die in “Einen fairen Test entwickeln” aufgelistet sind.
- Arbeiten Sie in kleinen Gruppen an der Versuchsanordnung.
- Im wissenschaftlichen Unterricht ist es meistens so, dass der Lehrer die Experimente erstellt und die Schüler diese durchführen. Die Versuchsanordnungsentscheidungen den Schülern zu übergeben, stellt dem Lehrer und den Schülern eine große Herausforderung. Die Schüler könnten z.B. nach Ausstattungen fragen, die man grade nicht vor Ort hat. Welche anderen Herausforderungen könnten sich noch stellen? Erstellen Sie eine Liste.

Bitte Sie nun die Teilnehmer über das letzte Problem *Body Mass index* nachzudenken.

- Arbeiten Sie am Body Mass Index - Problem zu zweit und benutzen Sie das Computerapplet.
- Schreiben Sie die Methode auf, die Sie anwenden.
- Schauen Sie sich nun den **Videoclip** an, in dem eine Unterrichtsstunde gezeigt wird.
  - Wie hat der Lehrer den Unterricht geplant? Welche Phasen waren vorzufinden?
  - Warum denken Sie, dass sie den Unterricht so geplant hat?
  - Wie hat der Lehrer das Problem eingeführt?
  - Welche unterschiedlichen Ansätze haben die Schüler verwendet?
  - Wie hat der Lehrer die Schüler unterstützt, die Probleme hatten?
  - Wie hat der Lehrer die gemeinsame Nutzung von Ansätzen und Strategien gefördert?
  - Was denken Sie, haben die Schüler gelernt?

Es ist einfach die Grenzen zu finden, wann einer Untergewicht/Übergewicht/Fettleibigkeit hat, wenn eine Variable konstant bleibt, während die andere systematisch variiert. Die Grenzen entstehen hier:

	BMI
<b>Untergewicht</b>	Unter 18.5
<b>Idealgewicht</b>	18.5 - 24.9
<b>Übergewicht</b>	25.0 - 29.9
<b>Fettleibigkeit</b>	30.0 und mehr

Um herauszufinden wie der Rechner funktioniert, ist es besser reale Werte für Größe und Gewicht nicht zu beachten und einfach eine Variable konstant zu halten, während die andere sich systematisch verändert. Wenn Schüler z.B. die Größe konstant bei 2 Metern halten (abgesehen davon, dass es nicht realistisch ist!), dann werden sie folgende Tabelle und/oder Graphen erhalten:

Gewicht (kg)	60	70	80	90	100	110	120	130
BMI	15	17.5	20	22.5	25	27.5	30	32.5
	Untergewicht		Idealgewicht		Übergewicht		Fettleibigkeit	

Hieran kann man sehen, dass es eine proportionale Beziehung zwischen dem Gewicht und dem BMI gibt. (Wenn man das Gewicht verdoppelt, verdoppelt man das BMI; hier  $BMI = \text{Gewicht}/4$ ).

## Handout 8: Experimentieren und Controlling der Variablen

### Einen fairen Test entwickeln

Die Schüler sollen sich ein Experiment ausdenken und durchführen, um das Verhältnis zwischen zwei oder mehr Variablen herauszufinden.

Wenn sie das machen, müssen sie überlegen, wie sie die anderen Variablen kontrollieren werden.

#### Ein oder zwei Stücke?



Zuckerwürfel brauchen eine Weile bis sie sich in Kaffee auflösen. Welche Faktoren können die Lösegeschwindigkeit beeinflussen? Entwickle und führe ein Experiment durch, um das Verhältnis zwischen der Lösegeschwindigkeit und einer dieser Faktoren zu untersuchen.

#### Papierflugzeug



Alice möchte wissen, wie man ein Papierflugzeug baut, das lange in der Luft bleibt. Welche Faktoren könnten die Flugzeit beeinflussen?

Entwickle und führe ein Experiment durch, um das Verhältnis zwischen der Flugzeit und einer dieser Faktoren zu untersuchen.

### Erforschen wie ein Rechner funktioniert

Die Schüler erhalten eine Tabellenkalkulation oder einen Online-Kalkulator, was sie erforschen sollen. Die Herausforderung wird darin bestehen, herauszufinden, wie es funktioniert.

Der Rechner auf der Abbildung zum Beispiel wird auf Internetseiten verwendet, um einem Erwachsenen dabei zu helfen zu erfahren, ob er Übergewicht hat.

Die Schüler geben Werte für Größen und Gewichte ein und sammeln Daten, um herauszufinden, wie der Rechner den BMI berechnet.

Viele weitere Beispiele finden Sie online.

#### Body Mass Index



#### Body Mass Index (BMI) Calculator

Enter values for height and weight.

Height:  metres

Weight:  kilograms

BMI:

You are in the  category

Body mass index (BMI) is measure of body fat that applies to adult men and women.

Finde heraus, wie der Rechner den Body-Mass-Index aus der Körpergröße und das Gewicht einer Person berechnet.

The BMI activity is taken from Swan, M; Pead, D (2008). *Professional development resources*. Bowland Maths Key Stage 3, Bowland Trust/ Department for Children, Schools and Families. Available online in the UK at: <http://www.bowlandmaths.org.uk>. It is used here by permission of the Bowland Trust.

## AKTIVITÄT I: EINE UNTERRICHTSSTUNDE PLANEN, UNTERRICHTEN UND DIE ERGEBNISSE REFLEKTIEREN

### **Benötigte Zeit:**

- **15 Minuten für eine Diskussion vor der Unterrichtsstunde**
- **1 Stunde für die Unterrichtsstunde**
- **15 Minuten nach der Unterrichtsstunde**

Suchen Sie sich eine Problemstellung aus dieser Einheit aus, die für Ihre Klasse angemessen wäre.

Besprechen Sie wie Sie:

- das Klassenzimmer und die benötigten Mittel organisieren.
- die Schüler in das Problem einführen.
- Den Schülern erklären, wie sie zusammenarbeiten sollen.
- Schüler herausfordern/helfen/, die das Problem einfach/schwer finden.
- ihnen helfen können, von alternativen Problemlösestrategien zu lernen.
- Ihre Unterrichtsstunde beenden.

Wenn Sie an diesem Modul mit einer Gruppe arbeiten, wird es hilfreich sein, wenn jeder Teilnehmer dasselbe Problem auswählt, da dies die anschließende Diskussion vereinfachen wird.

Nehmen Sie sich etwas Zeit, um den gehaltenen Unterricht zu reflektieren.

- Welche Lösungen haben die Schüler für die Aufgabe gefunden?
- Waren einige zuversichtlich? Haben einige Hilfestellung gebraucht? Was genau an Hilfe? Warum haben sie es gebraucht?
- Welche unterschiedlichen wissenschaftlichen Prozesse haben die Schüler angewandt?
- Teile zwei oder drei verschiedene Beispiele der Schüler.
- Wann haben Sie sich verpflichtet gefühlt ihnen zu geben? Warum war das so? Haben Sie zu viel oder zu wenig geholfen?
- Was denken Sie, was die Schüler aus Ihrem Unterricht gelernt haben?

## LITERATURHINWEISE

Swan, M (2005) Improving Learning in Mathematics: Challenges and Strategies, Department for Education and skills and downloadable from:

<http://www.nationalstemcentre.org.uk/elibrary/resource/1015/improving-learning-in-mathematics-challenges-and-strategies>

## REFERENZEN

Millar, R. (1994). What is 'scientific method' and can it be taught? In R. Levinson (Ed.), *Teaching Science* (pp. 164-177). London: Routledge.

Wood, D. (1988). *How Children Think and Learn*. Oxford and Cambridge, MA: Blackwell.

Wood, D., Bruner, J., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of child psychology and psychiatry*, 17, 89-100.