# aprendizaje DE CONCEPTOS POR INVESTIGACIÓN

##### Fichas de trabajo para profesores

### Contenido

1 Observar y visualizar 2

1 Observar y visualizar (continuación) 3

2 Clasificar y definir 4

2 Clasificar y definir (continuación) 5

3 Utilizar distintas representaciones 6

3 Utilizar distintas representaciones (continuación) 7

4 Representar y establecer conexiones 8

5 Estimar 12

6 Medir y cuantificar 13

7 Medir y cuantificar (continuación) 14

8 Evaluar enunciados 15

9 Experimentar y controlar variables 16

10 Comunicar 17

## 1 Observar y visualizar

### Describir y recrear lo que ves

|  |  |
| --- | --- |
| Muestra a la clase un poster u objeto y pide a los alumnos que describan de la forma más precisa posible lo que ven.  Con los alumnos sentados espalda con espalda; muestra a uno de ellos un diseño geométrico simple. Pide que lo describa de tal manera que la segunda persona sea capaz de reproducirlo con exactitud. | **Patrón de la Alhambra**  Este patrón de azulejos se encuentra en el palacio de la Alhambra en Granada (España).   * ¿Cómo describirías este patrón a alguien que no pudiera verlo? * Describe cómo se han dispuesto cada uno de los azulejos para formar el patrón. |

### Visualizar

|  |  |
| --- | --- |
| Pide a los estudiantes que cierren los ojos e imaginen una situación en la que algo esté cambiando. Pídeles que describan lo que “ven”. | **Cubo de queso**  Imagina que tienes un queso en forma de cubo y un cuchillo. Imagina que cortas un pequeño trozo de una de las esquinas del queso ¿Qué forma obtienes?  Imagina que cortas más y más lonchas paralelas del queso. ¿Cómo irá cambiando el triángulo? ¿Qué formas irán apareciendo?  ¡Continúa hasta que no quede queso!  Ahora cambia el ángulo de tu cuchillo… |

### Buscar estructuras

|  |  |
| --- | --- |
| Presenta a los alumnos un problema que les anime a buscar diferentes estructuras dentro de un contexto.  Pídeles que usen sus estructuras para hacer generalizaciones.    En el ejemplo que mostramos se les podría preguntar:   * ¿De cuántas maneras diferentes puedes contar los cables? * ¿Puedes *ver* el diagrama de maneras diferentes?   + ¿Puedes verlo como una composición de paralelogramos o triángulos?   + ¿Puedes ver una forma tridimensional? | **Cables del puente colgante**  Cuando se hace un cable para un puente colgante se ensamblan muchos filamentos en una formación hexagonal haciendo que queden “compactos”. Este diagrama representa un cable de tamaño 5 formado por 61 filamentos. ¿Cuántos filamentos son necesarios para hacer un cable de tamaño 10?  ¿Cuántos filamentos serán necesarios para un cable de tamaño *n*? |

Las tareas *Patrón de la Alhambra* y *Cables del puente colgante* están tomadas de Swan and Crust (1993) *Mathematics Programmes of Study, Inset for Key Stages 3 and 4*, National Curriculum Council, York.

## 1 Observar y visualizar (continuación)

### Buscar estructuras

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Pide a los alumnos que dibujen o construyan el modelo de una estructura que puedan ver.  Por ejemplo, podrían usar cerillas, modelar arcilla y una película de polietileno para realizar el modelo de la estructura de este cristal de diamante. | **Cristal de diamante en la matriz**  Mira esta imagen de un diamante en su roca matriz.  ¿Qué estructura parece tener? | | |
| Tetraedro | Octaedro | Enlaces del carbono en un diamante |

## 2 Clasificar y definir

### Semejanzas y diferencias

|  |  |
| --- | --- |
| Muestra a los alumnos tres objetos. “¿Cuál es el que sobra?” “Describe propiedades que compartan dos pero no el tercero”.  “Elige un objeto diferente de los tres y justifica por qué es el objeto que no corresponde a la serie”. | (a) (b) (c)  (a) *y = x2-6x+8*  (b*) y = x2-6x+9*  (c*) y = x2-6x+10* |
| Muestra a los alumnos algunas siluetas de animales.  “¿Puedes nombrar los animales?”  “Corta las 20 tarjetas y divide a los animales en grupos”.  “Anota los criterios que has usado para establecer los grupos”.  “Muestra tus grupos a otro alumno. ¿Son capaces de averiguar qué criterios utilizaste para agruparlos?” |  |

### Propiedades y definiciones

|  |  |
| --- | --- |
| Muestra a los alumnos un objeto.  “Mirad este objeto y escribid todas sus propiedades”.  “¿Constituye alguna de las propiedades por separado la *definición* de un objeto? Si no es así, ¿qué otro objeto tiene esa misma propiedad?” “¿Qué parejas de propiedades constituyen una definición y cuáles no?” | Simetría Central  Dos pares de lados paralelos  Cuatro lados iguales  Las diagonales se juntan en ángulos rectos  4 ejes de simetría  Cuatro ángulos rectos  Dos diagonales iguales |
| “Mira este animal y escribe todas sus características”.  “¿Hay alguna característica aislada que únicamente identifique al pájaro? Si no ¿qué otro animal tiene esa misma propiedad/característica?”  “¿Qué parejas de propiedades describirían únicamente al pájaro¿ ¿Qué parejas no?” | Garras  Dos patas  Cuerpo redondeado  Plumas  Pico  Cola |

## 2 Clasificar y definir (continuación)

### Crear y comprobar una definición

|  |  |
| --- | --- |
| Pide a los alumnos que escriban la definición de un polígono o de algún otro término matemático.  “Intercambiad las definiciones e intentad mejorarlas”.  Muestra a los alumnos un conjunto de objetos.  “Usa tu definición para la clasificación de los objetos”.  “Ahora mejora tus descripciones”. | ¿Cuál de estos objetos es un polígono según tu definición? |
| Pide a los alumnos que escriban la descripción de un pájaro o alguna otra planta o animal”.  “Intercambiad descripciones y tratad de mejorarlas”.  Pide a los alumnos que miren las siluetas de algunos animales.  “Usando solo tu descripción, decide cuál de estos animales podría ser considerado “pájaro’”.  “Ahora mejora tus descripciones”. | ¿Cuál de estos animales es un pájaro de acuerdo con tu descripción? |

### Clasificar usando una tabla de doble entrada

|  |  |
| --- | --- |
| Entrega a los alumnos una tabla de doble entrada para clasificar una serie de objetos.  “Crea tus propios objetos y añádelos a la tabla”.  “Trata de explicar por qué algunas entradas en particular no pueden ser completadas”. | 1 ó 2 líneas de simetría  ¿Es posible encontrar una forma que no tenga simetría rotatoria que tenga más de dos líneas de simetría?  Más de 2 líneas de simetría  Sin líneas de simetría  Simetría rotatoria  Simetría no rotatoria |

(Las siluetas de los animales están tomadas de Nuffield-Chelsea Curriculum Trust, 1987).

## 3 Utilizar distintas representaciones

### Utilizar distintas representaciones

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Palabras y tablas Tras dar una descripción verbal, se pide a los alumnos que realicen una tabla de valores.  Tras entregar una tabla, se pide a los alumnos que describan con palabras la relación. | **Horas de trabajo**  Construye una tabla que muestre la siguiente relación: *“Si duplicamos el número de personas en el trabajo, reduciremos a la mitad el tiempo necesario para completarlo”.*   |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | Número de personas | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | Tiempo necesitado (en horas) |  |  |  |  |  |  | |
| Imágenes y gráficosTras entregar una imagen de una situación, los alumnos deben imaginar cómo podría evolucionar la situación en el tiempo y construir un gráfico. Tras entregar un gráfico, se pide a los alumnos que dibujen la imagen correspondiente de la situación. | Montaña rusa Dibuja un gráfico que muestre la velocidad de la montaña rusa a lo largo de la pista. Velocidad de la montaña rusa  Distancia recorrida a lo largo de la pista |
| Palabras y fórmulas Se pide a los alumnos que simbolicen un problema del tipo “piensa en un número y…”, explica entonces por qué funciona. Los alumnos deberán proponer una identidad algebraica y elaborar el problema tipo “piensa un número” que se ajuste a ella. | **Piensa en un número** *“Piensa en un número. Multiplícalo por dos. Súmale 6. Divídelo entre 2. Réstale el número que pensaste al principio. Verás que la respuesta es siempre 3”.*  Construye tu propio ejemplo. |
| Tablas y gráficos Se pide a los alumnos que dibujen un gráfico a partir de una tabla de datos, sin representar los puntos dados. Los alumnos deberán construir una tabla de datos que se ajuste al gráfico facilitado anteriormente. | Esperanza de vidaDibuja un gráfico que se ajuste a los datos.  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Edad (años) | Número de supervivientes | Edad (años) | Número de supervivientes  Número de supervivientes | | 0  5  10  20  30  40 | 1000  979  978  972  963  950 | 50  60  70  80  90  100 | 913  808  579  248  32  1 |   Edad |

## 3 Utilizar distintas representaciones (continuación)

### Relacionar diferentes representaciones (continuación)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Tablas y fórmulas Se entrega a los alumnos una tabla de datos y estos deberán buscar una pauta o regla general .  Los alumnos usarán ésta para realizar predicciones. | **Torneos**  La tabla muestra el número de partidos (*p*) que se necesitan en un torneo de liga en el que cada equipo juega contra otro equipo dos veces, una en casa y otra fuera. Encuentra una fórmula que dé la relación entre el número de equipos (*n*) y el número de partidos (*p*).   |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | Número de equipos *(n*) | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | Número de partidos (*p*) | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 | 42 | 56 |   Usa tu fórmula para predecir nuevas entradas en la tabla.  (por ejemplo: ¿cuántos partidos serán necesarios si hay 20 equipos?) |
| Fórmulas y gráficos Los alumnos representan los puntos en un gráfico e intentan, usando el método de ensayo y error, encontrar una función algebraica que se ajuste a los mismos.  Esto supone traducir en las dos direcciones entre los gráficos y las fórmulas, realizando valiosas predicciones sobre las formas de varias funciones. | **Pingüinos**  Intenta ajustar una función del tipo *y* = *axn* al gráfico que muestra las alturas y los pesos medios de cinco tipos de pingüino.  Predice el peso de un pingüino, ahora extinto, cuya altura se piensa que era de 150 cm.   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | Altura  (cm) | Peso  (kg) | | Emperador | 114 | 29.48 | | Rey | 94 | 15.88 | | Ojigualdo | 65 | 5.44 | | de Fiordland | 56 | 3.18 | | Azul | 41 | 1.13 |   Altura (cm) |

*Las* actividades *Montaña rusa* y *Esperanza de vida* se han tomado de Swan (1985) *The Language of Functions and Graphs*, Shell Centre for Mathematical Education/Joint Matriculation Board. La de *Torneos* ha sido adaptada de Swan (1983), *Problems with Patterns and Numbers,* Shell Centre for Mathematical Education/Joint Matriculation Board. Estos ejemplos aparecen también en Swan and Crust (1993) *Mathematics Programmes of Study, Inset for Key Stages 3 and 4*, National Curriculum Council, York.

## 4 Representar y establecer conexiones

### Establecer correspondencias entre diferentes representaciones

Se reparte a cada grupo de alumnos un juego de tarjetas. Se pide que las clasifiquen en grupos de manera que cada grupo de tarjetas tenga un significado equivalente. Una vez hecho esto, tendrán que explicar cómo saben que las tarjetas son equivalentes. Pueden fabricarse también ellos mismos tarjetas que falten. Las tarjetas están diseñadas para que los estudiantes establezcan distinciones entre representaciones que con frecuencia causan confusión.

### Juego de tarjetas A: Expresiones algebraicas

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **E1** |  | **E2** |  |
| **E3** |  | **E4** |  |
| **E5** |  | **E6** |  |
| **E7** |  | **E8** |  |
| **E9** |  | **E10** |  |
| **E11** |  | **E12** |  |
| **E13** |  | **E14** |  |

### Juego de tarjetas B: Descripciones

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **W1** | Multiplica *n*  por dos y al resultado súmale seis. | **W2** | Multiplica *n* por tres  y eleva el resultado al cuadrado. |
| **W3** | Suma seis a *n* y multiplica el resultado por dos. | **W4** | Suma seis a *n* y divide el resultado entre dos. |
| **W5** | Suma tres a *n* y multiplica el resultado por dos. | **W6** | Suma seis *n* y eleva el resultado al cuadrado |
| **W7** | Multiplica *n*  por dos y súmale doce al resultado. | **W8** | Divide *n*  entre dos y súmale seis al resultado. |
| **W9** | Eleva *n* al cuadrado y al resultado súmale seis. | **W10** | Eleva *n* al cuadrado y multiplica el resultado por nueve. |
| **W11** |  | **W12** |  |
| **W13** |  | **W14** |  |

**Juego de tarjetas C: Tablas**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **T1** | **Sol.** | **T2** | **Sol.** |
| **T3** | **Sol.** | **T4** |  |
| **T5** | **Sol.**    **Sol.** | **T6** |  |
| **T7** | **Sol.**  **Sol.**    **Sol.** | **T8** |  |

### Juego de tarjetas D: Áreas

|  |  |
| --- | --- |
| **A1** | **A2** |
| **A3** | **A4** |
| **A5** | **A6** |

Swan, M. (2008), *A Designer Speaks: Designing a Multiple Representation Learning Experience in Secondary Algebra*. Educational Designer: Journal of the International Society for Design and Development in Education, 1(1), artículo 3.

## 5 Estimar

Trabajad todos juntos en el siguiente problema.

|  |
| --- |
| **Árboles**  ¿Cuántos árboles hacen falta cada día para proveer a los periódicos de tu país?  Intenta hacer una estimación razonable basada en hechos que ya conoces. |

### Para resolver este problema tienes que partir de algunos supuestos y construir una cadena de razonamiento.

### Haz una lista con cuestiones adecuadas a tu clase para trabajar sobre la estimación

|  |
| --- |
|  |

## 6 Medir y cuantificar

### ¿Con que magnitudes se encuentran tus alumnos en su vida diaria?

|  |
| --- |
| Realiza una lista: |

### Posibles actividades para los alumnos:

### Comparar medidas

|  |  |
| --- | --- |
| Ofrece a tus alumnos dos maneras de medir algo. Pídeles que las comparen y que digan por qué una es mejor que otra. | **Medir una pendiente**  Coloca estas escaleras en orden de pendiente.  ¿Es la **altura del escalón- longitud del escalón** una buena manera de medir la pendiente?  ¿Por qué es mejor utilizar **altura del escalón ÷ longitud del escalón**? |

### Crear unidades de medida

|  |  |
| --- | --- |
| Pide a tus alumnos que “inventen” una unidad de medida para un fenómeno cotidiano y que la usen. | ¿Cómo medirías:   * la “compacidad” de una forma geométrica? * la “pegajosidad” de una cinta adhesiva? * la “curvatura” de un río? * la “dificultad” de una curva en una carretera? * el “estado físico” de una persona? |

## 7 Medir y cuantificar (continuación)

**Medir la “compacidad”**

Lo inadecuado de usar *área ÷ perímetro* como medida de “compacidad” puede observarse cuando se comparan dos formas de tamaños diferentes. Piensa en un cuadrado de dos unidades de lado y en un cuadrado de tres unidades de lado. Podríamos decir que son igualmente compactos ya que ambos son cuadrados, pero usando la proporción *área ÷ perímetro* sus medidas serían diferentes: 4/8 = 0.5 and 9/12 = 0.75.

Podríamos adaptar esta medida para hacerla dimensional usando la fórmula: ,  
donde *a* = área y *p* = perímetro. Esto daría, entonces, el valor 1/16 para ambos cuadrados. Esta proporción adquiere su máximo valor cuando la forma es circular. En ese caso .

Para hacer que la medida esté entre 0 y 1 podríamos, por tanto, agrandar a escala multiplicando por 4π. Los geógrafos se valen de esto y lo denominan ***Ratio de circularidad***(Selkirk, 1982):

***Ratio de circularidad***



donde *a* = área; *p* = perímetro de la forma

Una crítica a esta unidad de medida es la dificultad que supone definir y calcular *p* cuando se trata de medir límites irregulares muy grandes como por ejemplo países o cuencas de los ríos. Otras posibles medidas, también propuestas por Selkirk, son:

***Ratio de forma***



donde *a* = área; *l* = longitud de una línea que una los dos puntos más distantes

***Ratio de compacidad***



donde *a* = área; *R* = radio del círculo más pequeño que rodee la forma

***Ratio de radio***



donde *r* = radio del círculo mayor que pueda insertarse en la forma; *R* = radio del círculo más pequeño que rodee la forma

## 8 Evaluar enunciados

Se da a cada grupo de alumnos un juego de tarjetas con enunciados. Estos enunciados deben estar relacionados de alguna manera. Los alumnos deben decidir si son los enunciados son verdaderos siempre, a veces o nunca.

* Si piensan que son verdad *siempre* o *nunca*, deben explicar cómo llegan a esa certeza.
* Si piensan que son verdad *a veces*, deben definir exactamente cuándo son verdaderos y cuando no.

|  |  |
| --- | --- |
| **Aumento de sueldo**  Raúl consigue un aumento de sueldo del 30%.  Jorge consigue un aumento de sueldo del 25%.  De esta forma Raúl consigue un aumento de sueldo mayor. | **Rebajas**  Al inicio de las rebajas se disminuyen los precios un 25%. Al finalizar las rebajas los precios aumentaron un 25%. De este modo los precios al inicio y al final son los mismos. |
| **Área y perímetro**  Cuando cortas un pedazo de una forma reduces su área y perímetro. | **Ángulos rectos**  Un pentágono tiene menos ángulos rectos que un rectángulo. |
| **Cumpleaños**  En una clase de diez alumnos la probabilidad de que dos alumnos hayan nacido el mismo día de la semana es de uno. | **Lotería**  En una lotería los siguientes seis números: 3, 12, 26, 37, 44, 45 tienen más probabilidad de salir que los siguientes seis números: 1, 2, 3, 4, 5, 6. |
| **Fracciones mayores**  Si añades el mismo número al numerador y al denominador de una fracción, la fracción aumenta de valor. | **Fracciones menores**  Si divides del numerador y del denominador de una fracción por el mismo número, la fracción disminuye de valor. |
| **Raíces cuadradas**  La raíz cuadrada de un número es menor o igual que el número. | **Series**  Si el límite de la secuencia de términos en una serie infinita es cero, la suma de las series es cero. |

## 9 Experimentar y controlar variables

### Diseñar el experimento adecuado

|  |  |
| --- | --- |
| Se pide a los alumnos que diseñen y realicen un experimento para encontrar la relación entre dos o más variables. Una vez hecho, han de pensar en cómo controlar otras variables | **¿Un trozo o dos?**  Los terrones de azúcar necesitan un cierto tiempo para disolverse en el café. ¿Qué factores podrían afectar a la velocidad de disolución? Diseña y lleva a cabo un experimento para investigar la relación entre la velocidad de disolución y uno de esos factores. |
| **Avión de papel**  Anchura  Alicia quiere saber cómo construir un avión de papel que pueda volar durante mucho tiempo. ¿Qué factores podrían afectar al tiempo de vuelo?  Diseña y lleva a cabo un experimento para investigar la relación entre el tiempo de vuelo y uno de esos factores. |

**Investigar cómo funciona una calculadora**

|  |  |
| --- | --- |
| Se da a los alumnos una hoja de cálculo o una calculadora *online* para investigar. El reto es averiguar cómo funciona.  Por ejemplo, la calculadora que se muestra aquí se usa en páginas web para ayudar a los adultos a comprobar si tienen o no sobrepeso. Los alumnos introducirán valores de altura y peso y recopilarán los datos para descubrir cómo calcula la calculadora el IMC.  Hay muchos otros ejemplos *online.* | **Índice de masa corporal**    Intenta averiguar cómo funciona la calculadora al calcular el índice de masa corporal a partir de la altura y peso de una persona. |

## 10 Comunicar

### Explicar

|  |  |
| --- | --- |
| Se pide a los alumnos que expliquen un fenómeno cotidiano de la manera más clara y detallada posible. Pueden ilustrar sus explicaciones con diagramas, si eso les ayuda. | Intenta aportar una explicación clara y convincente para cada una de las siguientes cuestiones:   * Las sillas de cuatro patas con frecuencia se tambalean, pero los taburetes de tres patas nunca. ¿Por qué? * Una pregunta de una niña de cuatro años mientras iba en coche por la noche: “¿Por qué nos sigue la Luna?” * Caminas por una calle oscura hacia una farola. Tu sombra te sigue. Pasas la farola y continúas caminando. ¿Qué ocurre con tu sombra? ¿Se mueve tu sombra a velocidad constante? ¿Se mueve más rápido o más lento que tú? Explica por qué. * Los camiones que giran a la izquierda representan un riesgo particular para los ciclistas. Explica por qué. * “Cuando muevo la mano izquierda mi reflejo en el espejo mueve la mano derecha. Parece que invierte izquierda y derecha. Sin embargo, no parece cambiar arriba y abajo”. ¿Podrías explicarlo? * Las tuercas y las cabezas de los tornillos suelen tener forma hexagonal. ¿Por qué? ¿Por qué no tienen otras formas? * ¿Por qué se pliega siempre el papel en línea recta? ¿Por qué no se pliega en curva? |