

## CONSTRUIR SOBRE LA BASE DE LO QUE YA SABEN LOS ALUMNOS

¿Cómo puedo responder a los alumnos de manera que mejore su aprendizaje?

# Hojas informativas para los profesores

## Índice

1	Dificultades en la evaluación formativa .....	2
2	Principios de la evaluación formativa.....	3
3	Hacer visible el razonamiento .....	5
4	Actividades de evaluación y ejemplos de respuestas .....	6
4	Actividades de evaluación y ejemplos de respuestas (continuación) .....	9
4	Actividades de evaluación y ejemplos de respuestas (continuación) .....	12
5	Mejorar las respuestas de los alumnos planteando preguntas .....	15
6	Sugerencias para plantear preguntas .....	20
7	Actividades de evaluación y ejemplos de respuestas para los conceptos.....	219
8	Ideas equivocadas y errores: resultados de la investigación .....	23
9	Plan didáctico para una sesión de evaluación formativa .....	27
10	Efecto del feedback en el aprendizaje del alumno.....	330

## 1 Dificultades en la evaluación formativa

La bibliografía de investigación sugiere que la aplicación de la evaluación formativa presenta un sinnúmero de problemas y dificultades. Se resumen de esta manera en el informe exhaustivo de Black y Wiliam (1998)<sup>1</sup>:

### La eficacia del aprendizaje:

- Los tests de los docentes fomentan el aprendizaje memorístico y superficial.
- Las preguntas y los métodos utilizados no son compartidos entre los profesores, y no se revisan críticamente en relación con lo que evalúan en realidad.
- En relación con el aprendizaje, se tiende a enfatizar la cantidad de trabajo y a descuidar su calidad.

### El impacto de la evaluación

- Se otorga excesiva importancia a la evaluación mediante notas y puntuaciones e insuficiente al aporte de consejos útiles y a la labor didáctica.
- La forma de trabajo implica que los alumnos se comparen entre sí; en su percepción, el primer objetivo de esto es la competición y no la mejora personal. Por consiguiente, el feedback de evaluación enseña a los estudiantes con resultados bajos que les falta "capacidad", lo cual les hace creer que no son capaces de aprender.

### La función directiva de la evaluación

- El feedback que los profesores dan a los alumnos parece desempeñar una función directiva y social, a menudo a costa de la función didáctica.
- A menudo, los profesores son capaces de predecir los resultados de los alumnos en los tests externos debido a que sus propios tests los imitan. Sin embargo, los docentes conocen demasiado poco las necesidades de aprendizaje de los alumnos.
- Se da mayor prioridad a la recogida de notas para rellenar informes oficiales que al análisis del trabajo de los alumnos para identificar sus necesidades de aprendizaje; es más, algunos profesores no prestan atención alguna a los informes de evaluación de los anteriores profesores de sus alumnos.

---

<sup>1</sup> Black, P., & Wiliam, D. (1998). Inside the black box : raising standards through classroom assessment. London: King's College London School of Education 1998.

## 2 Principios de la evaluación formativa

La evaluación formativa puede definirse como:

*"...todas las actividades llevadas a cabo por los profesores y por sus alumnos para autoevaluarse, que proporcionan información que se emplea como feedback para modificar la acción pedagógica y las actividades didácticas en las que participan. Esta evaluación se convierte en "evaluación formativa" cuando se aplica lo observado para adaptar el trabajo didáctico de cara a satisfacer las necesidades".*

*(Black y Wiliam, 1998, pár. 91)*

### Deje claros los objetivos de la sesión

Comenta los objetivos con los alumnos y, de vez en cuando, pídeles que presenten pruebas que demuestren que pueden alcanzar estos objetivos.

*"Invéntate un ejemplo para demostrarme que conoces y comprendes el teorema de Pitágoras."*

*"El objetivo de esta sesión era que tú decidieras qué métodos utilizar. Muéstrame dónde lo has hecho."*

Los alumnos pueden tener dificultades para apreciar que algunas de las sesiones tienen por objetivo la comprensión de conceptos, mientras que otras están más orientadas al desarrollo de procesos de aprendizaje por investigación.

Dejar claros los objetivos no significa escribirlos en la pizarra al comienzo de la sesión, sino más bien mencionarlos de forma explícita, mientras trabajan los alumnos. Si los objetivos son el desarrollo de procesos de aprendizaje por investigación, entonces, en las sesiones en común, pide a los alumnos que comenten y comparen planteamientos en lugar de respuestas.

### Evalúa a los grupos y también a cada alumno por separado

Las actividades en grupo ofrecen muchas oportunidades de observar, escuchar y plantear preguntas a los alumnos. Ayudan a exteriorizar el razonamiento y permiten al profesor detectar rápidamente dónde han surgido dificultades.

### Mira y escucha antes de intervenir

Antes de intervenir en una conversación en grupo, espera y escucha. Trata de seguir la línea de razonamiento de los alumnos. Cuando intervengas, comienza pidiéndoles que expliquen algo. Si no lo consiguen, a continuación pide ayuda a otro alumno.

### Utiliza métodos de evaluación divergentes ("Muéstrame lo que sabes sobre...").

Las estrategias de evaluación convergentes se caracterizan por las listas de comprobación y las formulaciones tipo "Puede hacerlo". El profesor plantea preguntas cerradas con el fin de determinar si el alumno sabe, comprende o puede hacer una cosa determinada. Este es el tipo de evaluación más utilizado en los tests escritos.

En cambio, la evaluación divergente consiste en hacer preguntas abiertas que ofrecen a los alumnos la oportunidad de describir y explicar su pensamiento y razonamiento. Estas preguntas permiten a los alumnos sorprendernos, ya que el resultado no está predeterminado.

### Aporta un feedback constructivo y útil

La investigación muestra que responder al trabajo de los alumnos con notas o niveles es ineficaz e incluso puede dificultar el aprendizaje. Este tipo de feedback cuantitativo tiene por consecuencia que los alumnos comparen notas o niveles y desvirtúa las propias Matemáticas.

En lugar de ello, emplea comentarios cualitativos orales y escritos que ayuden a los alumnos a tomar consciencia de lo que saben hacer, lo que tienen que ser capaces de hacer y cómo pueden superar las dificultades.

### **Cambia la acción pedagógica en función de la evaluación**

Además de proporcionar feedback a los alumnos, una buena evaluación ha de aplicarse posteriormente en la acción pedagógica. Sé flexible y prepárate para cambiar tu planificación didáctica en mitad del curso en función de lo que averigües.

*Adaptado de: Improving Learning in Mathematics, Department for Education and Skills, 2005.*

### 3 Hacer visible el razonamiento

#### Utiliza las minipizarras para que los alumnos respondan a las preguntas en ellas

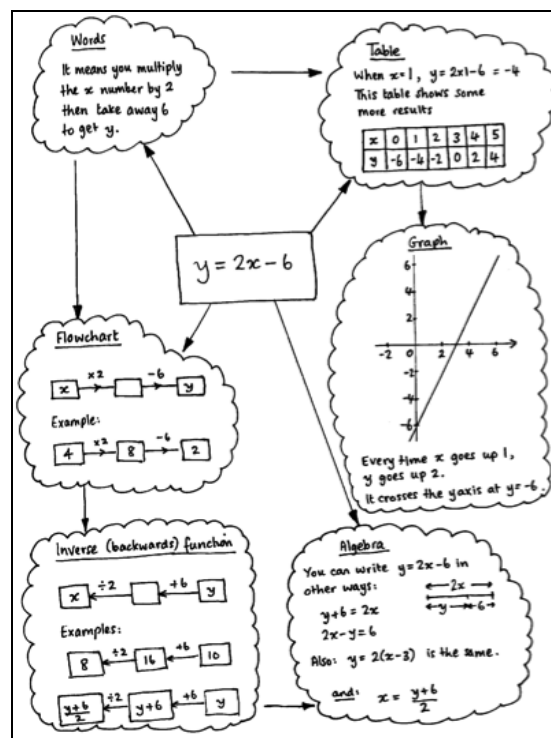
Una de las dificultades que presentan las preguntas normales planteadas en el aula es que algunos alumnos llevan toda la iniciativa mientras que otros tienen demasiado miedo para participar. En esta estrategia, cada alumno presenta una respuesta al mismo tiempo. Cuando se utilizan preguntas abiertas, los alumnos son capaces de dar respuestas diferentes a las de sus compañeros. El profesor es capaz de identificar inmediatamente qué alumnos comprenden las ideas y cuáles tienen dificultades.



#### Pide a los alumnos que hagan pósters

Pide a cada pequeño grupo de alumnos que trabaje de forma conjunta para crear un póster:

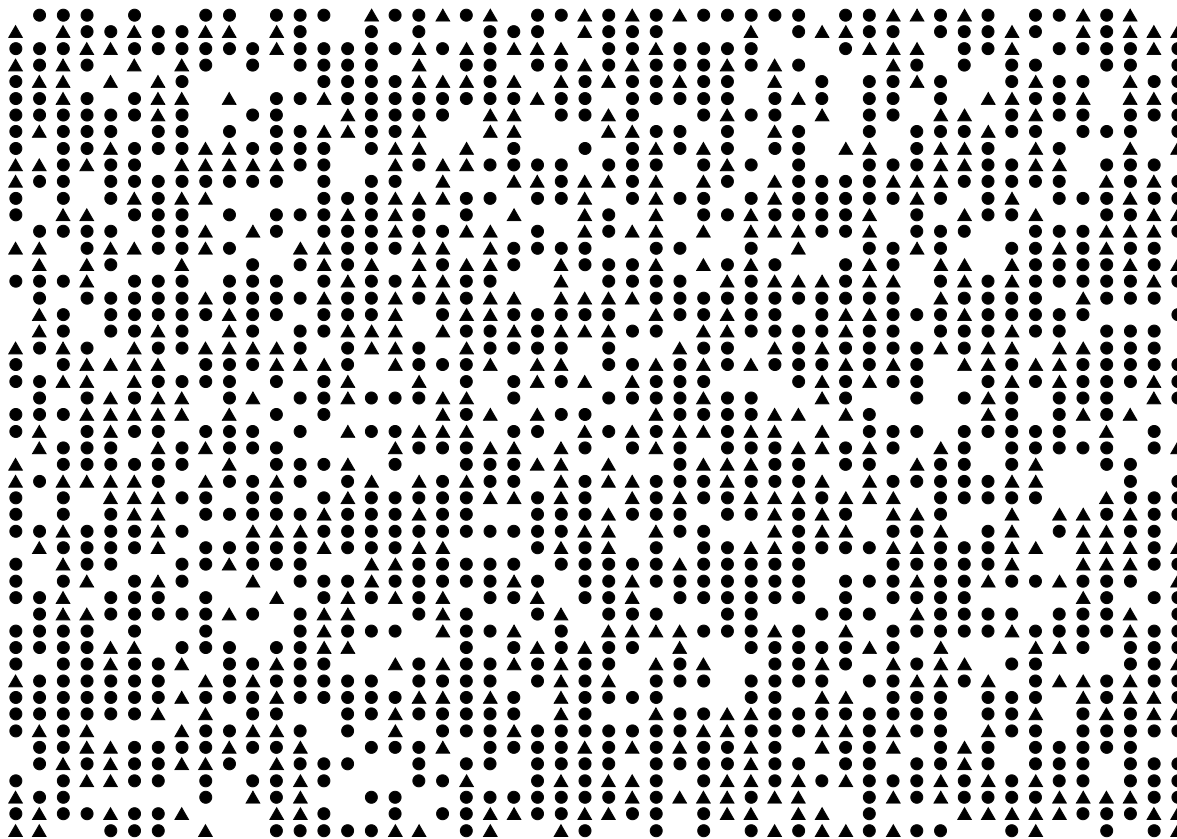
- que muestre su solución conjunta a un problema.
- que resuma lo que saben sobre un tema determinado, o
- que plantee dos maneras diferentes de resolver un problema dado.
- que identifique las conexiones existentes entre una idea matemática y otras ideas relacionadas.



Adaptado de: *Improving Learning in Mathematics, Department for Education and Skills, 2005.*

## 4 Actividades de evaluación y ejemplos de respuestas

### Contar árboles



Este diagrama muestra unos árboles en una plantación.

Los círculos ( ● ) representan árboles viejos y los triángulos ( ▲ ), árboles jóvenes.

Tom quiere saber cuántos árboles hay de cada tipo, pero dice que costaría demasiado tiempo contarlos todos uno por uno.

1. ¿Qué método se podría utilizar para estimar el número de árboles de cada tipo?  
Explica tu método en profundidad.
2. En tu hoja de cálculo, utiliza tu método para estimar el número de:
  - (a) Árboles viejos
  - (b) Árboles jóvenes

Ejemplo de respuesta: Laura

① You could multiply the number of trees in the length by the number of trees in the width and then half your answer.

② a. Old trees - 644  
Young trees - 644

width - 33  
length - 39.

$33 \times 39 = 1287$   
 $1287 \div 2 = 643.5 = 644$

Ejemplo de respuesta: Jenny

1. there are 38 trees in each column  
there are around 11 young trees  
and around 27 old ones  
33 trees in each row so

$11 \times 33 = 363$   
 $27 \times 33 = \frac{891}{1254}$

2.

a.  $11 \times 33 = 363 = \text{new trees.}$

b.  $27 \times 33 = 891 = \text{old trees.}$

Ejemplo de respuesta: Woody

2 columns has 21 young trees  
55 old trees

50 columns is approx  
 $50 \div 2 = 25$   
 $25 \times 21 = \text{amount of young trees} = 525$   
 $25 \times 55 = \text{amount of old trees} = 1,375$   
 rounded up  
 young 530  
 old 1,380

Ejemplo de respuesta: Amber

Counting trees

- If Tom draws a 10x10 square round some trees and counts how many old and new there are. There are 50 rows and 50 columns altogether so he must multiply by 25. He could do this a few times to check and then take the average.
- |            |      |   |             |   |
|------------|------|---|-------------|---|
| 53 old     | x 25 | = | 1325 old    |   |
| 28 new     | x 25 | = | 700 new     |   |
| 19 spaces  | x 25 | = | 475 spaces  |   |
| <u>100</u> |      |   | <u>2500</u> | $1325 + 1200 \div 2 = 1262.5$<br>$700 + 875 \div 2 = 787.5$ |

check

48 old	x 25	=	1200 old	So about 1263 old trees and 788 new trees
35 new	x 25	=	875 new	
17 spaces	x 25	=	425 spaces	
<u>100</u>			<u>2500</u>	



## 4 Actividades de evaluación y ejemplos de respuestas (continuación)

### Cámara de seguridad

El dueño de una tienda quiere evitar hurtos.

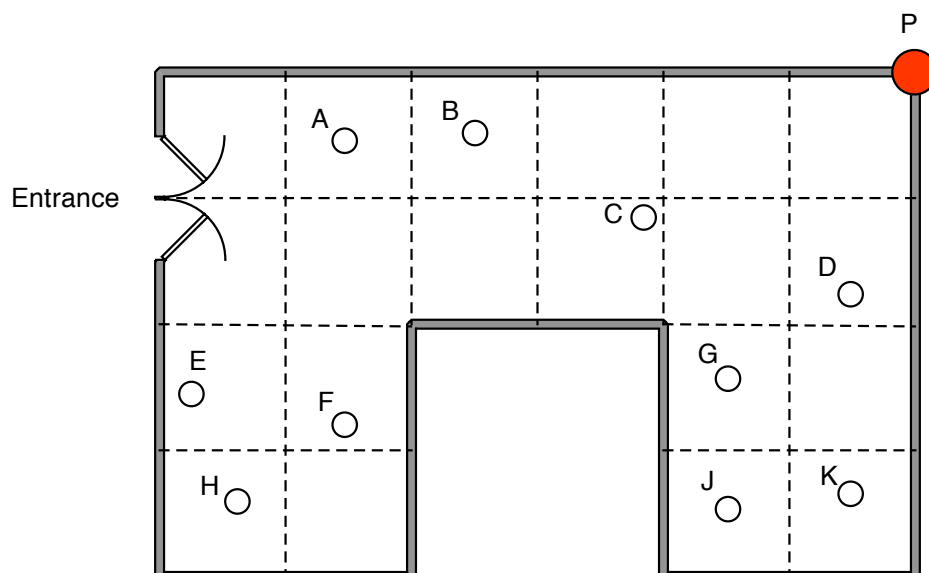
Decide instalar una cámara de seguridad en el techo de su tienda.

La cámara puede girar 360°.

El dueño de la tienda coloca la cámara en el punto P, en la esquina de la tienda.

El siguiente esquema muestra a diez personas que están de pie en la tienda.

*Vista esquemática de la tienda.*



1. ¿Qué personas no pueden ser vistas por la cámara situada en P?
2. El comerciante dice que "el 15% de la tienda está fuera del campo visual de la cámara". Demuestra que está en lo cierto.
3. (A) Muestra el mejor lugar para la cámara, de modo que pueda ver la mayor parte posible de la tienda.  
(B) Explica cómo sabes que este es el mejor lugar para la cámara.

Ejemplo de respuesta: Max.

1. E, F and H cannot be seen by the camera.

2.

3a. The exact middle of the shop would be the place where it could see the most amount of people.

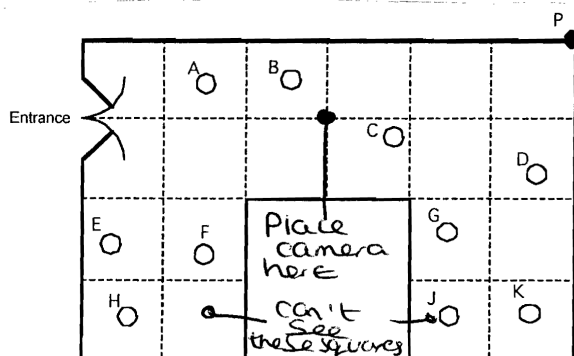
3b. Because the middle of the shop will grant the camera a larger view of the shop.

Ejemplo de respuesta: Ellie

1. F + H

2. This is true because if there are 20 squared areas to make up the shop and 3 cannot be seen by the camera then that means the 3 squared areas would have to equal 15%. They do because if <sup>15%</sup> of the room = 100% then to get from 10 to 100 you divide by 10 and if you get 5 to 100 you divide by 2 and then by 10. add them together and you'll get 15%.

3a/b. I think the best place for the camera is in the centre of the room because it only can't see two squares.

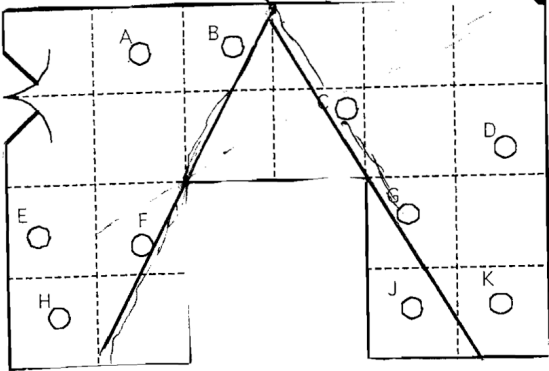


Ejemplo de respuesta: Simon

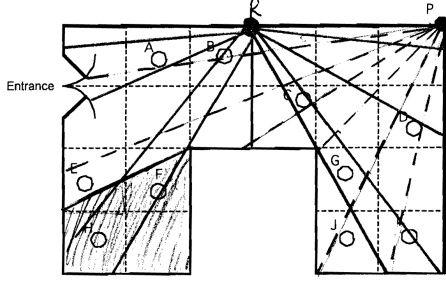
1. F + H

2. because 3 squares are hidden from the camera  
1 square is 5% so 3 squares are 15%

3.   
a Here is the best place  
b it can see all the carro almost every where




Ejemplo de respuesta: Rhianna



1. He cannot see F + H.

2. There are 20 Squares. 3 squares are hidden from the camera.  
Each Square represents 5%.  
 $3 \times 5\% = 15\%$   
This proves 15% of the shop is hidden

3.   
a) ● = R  
My camera 5% is hidden on one half.  
5% is hidden on the other half.  
This way only 10% is hidden + that space could be used for a til / trolleys.

b) I know this is the best place because it has a full view of all around the shop it can go .

## 4 Actividades de evaluación y ejemplos de respuestas (continuación)

### Gatos y gatitos

Aquí mostramos un póster publicado por una organización que se ocupa de los gatos callejeros.



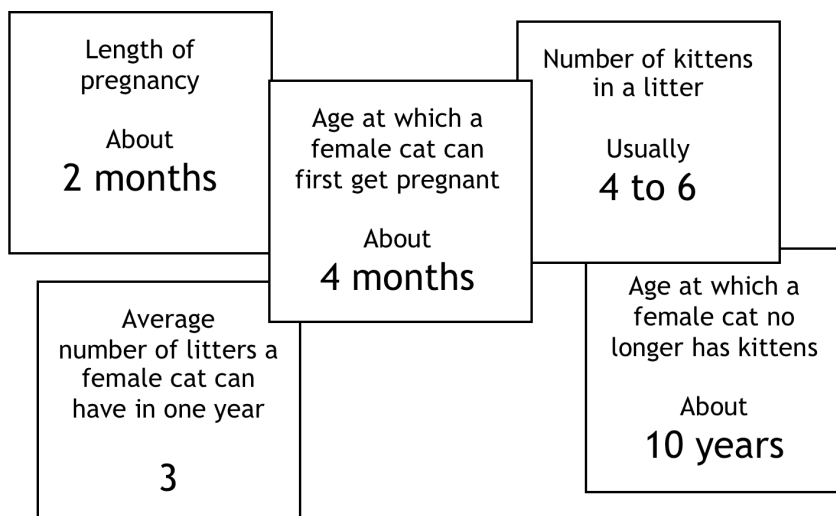
*¡Los gatos no saben sumar,  
pero se multiplican!*

**En solo 18 meses, esta gata  
puede tener 2000 descendientes.**

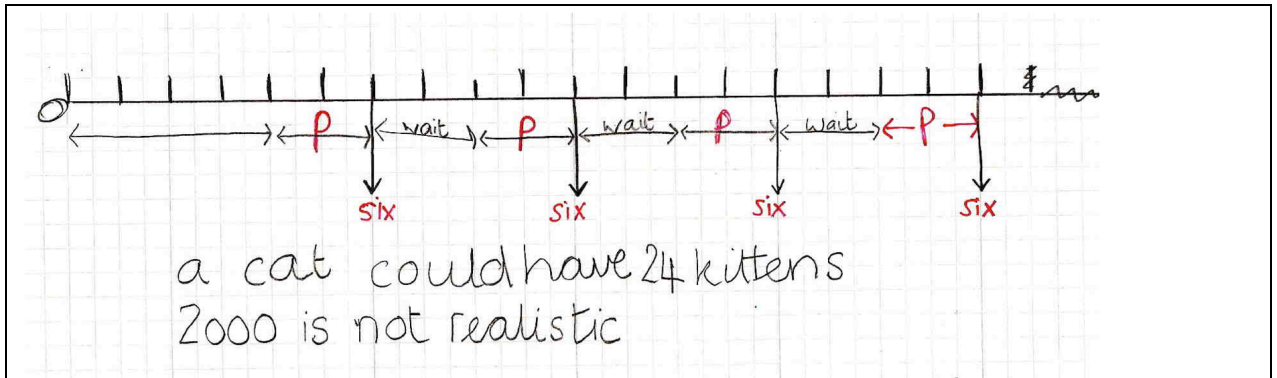
**Asegúrate de que tu gata no puede tener gatitos.**

Averigua si este número de descendientes es realista.

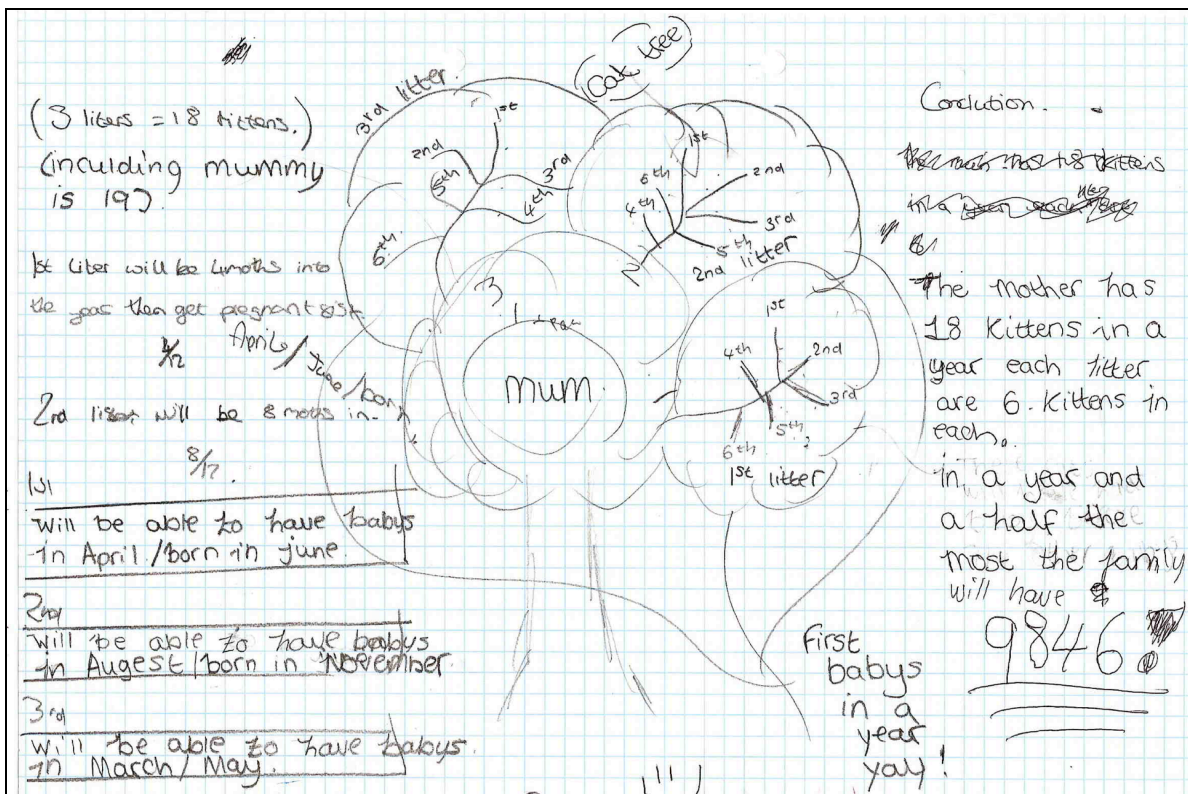
Te ofrecemos algunos datos que necesitarás:



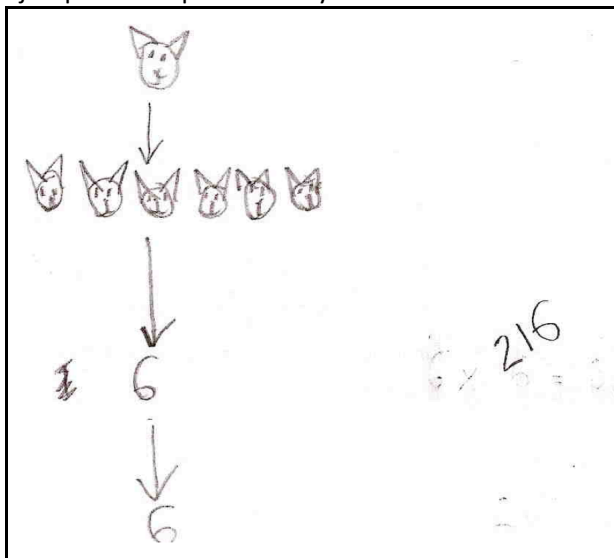
Ejemplo de respuesta: Alicia



Ejemplo de respuesta: Ben



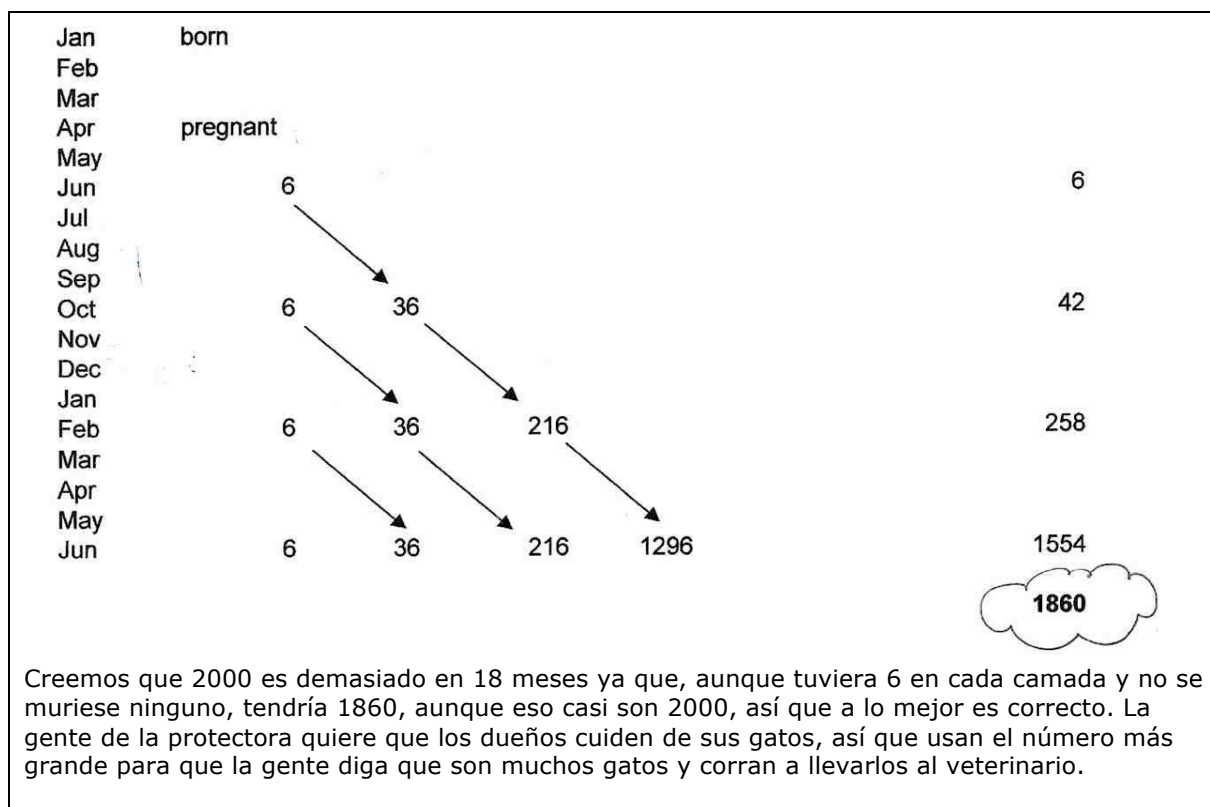
Ejemplo de respuesta: Wayne



Ejemplo de respuesta: Sally y Janet

Dos alumnos trabajaron en esta tarea, comentando y compartiendo sus métodos.

Se utilizó una hoja de cálculo.



## 5 Mejorar las respuestas de los alumnos planteando preguntas

### Contar árboles

#### *Ejemplo de respuesta: Laura*

Laura trata de calcular el número de árboles viejos y nuevos multiplicando el número situado a cada lado del diagrama completo y luego dividiendo por dos. No tiene en cuenta los huecos ni se fija en que hay un número desigual de árboles de cada especie.

*¿Qué podrías preguntarle a Laura para ayudarle a mejorar su respuesta?*

#### *Ejemplo de respuesta: Jenny*

Jenny se da cuenta de que es necesario tomar muestras, pero multiplica el número de árboles jóvenes y viejos de la columna de la izquierda por el número de árboles de la fila inferior. Hace caso omiso de las columnas sin árboles de la fila inferior, por lo que su método subestima el número total de árboles. Sin embargo, tiene en cuenta la diferente cantidad de árboles viejos y jóvenes.

*¿Qué podrías preguntarle a Jenny para ayudarle a mejorar su respuesta?*

#### *Ejemplo de respuesta: Woody*

Woody utiliza una muestra de dos columnas y cuenta el número de árboles viejos y jóvenes. A continuación, multiplica por 25 (la mitad de 50 columnas) para hacer una estimación del número total.

*¿Qué podrías preguntarle a Woody para ayudarle a mejorar su respuesta?*

#### *Ejemplo de respuesta: Amber*

Amber escoge una muestra representativa, completa el trabajo y obtiene una respuesta razonable. Utiliza correctamente el razonamiento proporcional. Revisa su trabajo sobre la marcha contando los huecos en los árboles. Su trabajo es claro y fácil de seguir.

*¿Qué podrías preguntarle a Amber para ayudarle a mejorar su respuesta?*

## Cámara de seguridad

### *Ejemplo de respuesta: Max.*

Max se da cuenta de que F y H están fuera del campo visual, pero se equivoca al pensar que E también lo está. No ofrece pruebas que justifiquen su razonamiento; además, sus afirmaciones adicionales son incorrectas.

Laura trata de calcular el número de árboles viejos y jóvenes multiplicando el número situado a cada lado del diagrama completo y luego dividiendo entre dos. No tiene en cuenta los huecos ni percibe que hay un número desigual de árboles de cada especie.

*¿Qué podrías preguntarle a Max para ayudarlo a mejorar su respuesta?*

### *Ejemplo de respuesta: Ellie*

Ellie no muestra líneas de visión para justificar sus respuestas. Sin embargo, afirma correctamente que F y H, así como tres cuadros, están fuera del campo de visión. Sin embargo, puede que se refiera a cuadros enteros en lugar de áreas. Su justificación para el 15% es incompleta y está mal explicada. En cierto modo, parece entender que el 5% es una vigésima parte y el 10%, una décima parte.

*¿Qué podrías preguntarle a Ellie para ayudarlo a mejorar su respuesta?*

### *Ejemplo de respuesta: Simon*

Simon afirma correctamente que F y H, así como 3 cuadros (el 15% de la superficie), están fuera del campo de visión. Sin embargo, es posible que piense que 3 cuadros enteros quedan fuera del campo de visión de la cámara. Investiga cuál es el mejor lugar para la cámara y muestra que el centro de un lado es bueno, pero no profundiza más. No se muestran los cálculos.

*¿Qué podrías preguntarle a Simon para ayudarlo a mejorar su respuesta?*

### *Ejemplo de respuesta: Rhianna*

Rhianna muestra correctamente que F y H, así como 3 cuadros (el 15% de la superficie), están fuera del campo de visión. Investiga cuál es el mejor sitio para la cámara y muestra que el centro de un lado es bueno. Rhianna muestra claramente diagramas con líneas de visión y cálculos que justifican sus conclusiones.

*¿Qué podrías preguntarle a Rhianna para ayudarlo a mejorar su respuesta?*



## Gatos y gatitos

### **Ejemplo de respuesta: Alice**

Alice eligió representar la tarea mediante una línea de tiempo. Solo ha tenido en cuenta la cantidad de gatitos nacidos de la gata original. El cálculo requerido es exacto.

*¿Qué podrías preguntarle a Alice para ayudarlo a mejorar su respuesta?*

### **Ejemplo de respuesta: Ben**

Ben ha decidido elaborar un "árbol de gatos" y trata de controlar el tiempo (con algunos errores). La comunicación es bastante clara, lo que permite al lector seguir la argumentación, pero no explica el valor de 9846 y no sigue el razonamiento ya que, una vez más, solo se tienen en cuenta los gatitos nacidos de la gata original. Se hace explícito el número de crías por camada.

*¿Qué podrías preguntarle a Ben para ayudarlo a mejorar su respuesta?*

### **Ejemplo de respuesta: Wayne**

¡Woody parece decantarse por un planteamiento minimalista! Empieza con una representación pictórica que le llevaría mucho tiempo realizar; posteriormente la abandona en favor de una representación numérica.

*¿Qué podrías preguntarle a Wayne para ayudarlo a mejorar su respuesta?*

### **Ejemplo de respuesta: Sally y Janet**

Sally y Janet utilizaron una hoja de cálculo para el control del tiempo y la multiplicación. Su método es claro y eficaz.

*¿Qué podrías preguntarles a Sally y Janet para ayudarles a mejorar su respuesta?*

## 6 Sugerencias para plantear preguntas

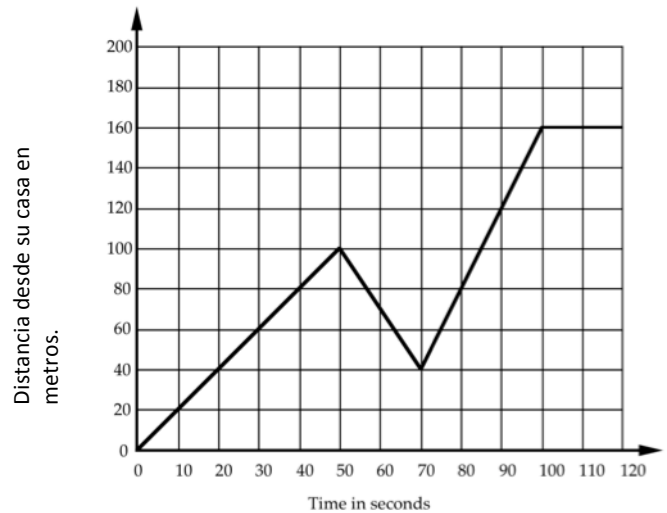
<b>Formula preguntas, elige herramientas y representaciones oportunas.</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Qué preguntas podrías plantear acerca de esta situación?</li> <li>• ¿Cómo puedes empezar a abordar este problema?</li> <li>• ¿Qué técnicas podrían ser útiles en esta lista?</li> <li>• ¿Qué tipo de diagrama podría ser útil?</li> <li>• ¿Puedes inventar una notación sencilla para esto?</li> <li>• ¿Cómo puedes simplificar este problema?</li> <li>• ¿Qué se sabe y qué se desconoce?</li> <li>• ¿Qué hipótesis podrías plantear?</li> </ul>
<b>Razona de forma lógica, construye hipótesis y argumentos, calcula con precisión</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Dónde has visto algo parecido antes?</li> <li>• ¿Qué es fijo aquí y qué se puede cambiar?</li> <li>• ¿Qué es igual y qué es diferente aquí?</li> <li>• ¿Qué pasaría si cambio...?</li> <li>• ¿Adónde me lleva este planteamiento?</li> <li>• ¿Qué vas a hacer cuando obtengas esa respuesta?</li> <li>• Esto es solo un caso especial de... ¿qué?</li> <li>• ¿Puedes formular alguna hipótesis?</li> <li>• ¿Se te ocurre algún contraejemplo?</li> <li>• ¿Qué errores has cometido?</li> <li>• ¿Puedes sugerir una manera diferente de hacer esto?</li> <li>• ¿Qué conclusiones puedes sacar de estos datos?</li> <li>• ¿Cómo puedes verificar este cálculo sin volver a hacerlo todo?</li> <li>• ¿Existe una forma lógica de registrar esto?</li> </ul>
<b>Interpreta y evalúa los resultados obtenidos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Cuál es la mejor forma de mostrar los datos?</li> <li>• ¿Es mejor utilizar este tipo de cuadro o aquel? ¿Por qué?</li> <li>• ¿Qué patrones puedes observar en estos datos?</li> <li>• ¿Qué causas podrían explicar estos patrones?</li> <li>• ¿Puedes darme un argumento convincente que justifique esa afirmación?</li> <li>• ¿Te parece razonable la respuesta? ¿Por qué?</li> <li>• ¿Cómo puedes estar seguro al 100% de que es cierto? ¡Convénceme!</li> <li>• ¿Qué opinas del razonamiento de Anne? ¿Por qué?</li> <li>• ¿Qué método convendría utilizar aquí? ¿Por qué?</li> </ul>
<b>Comunica y reflexiona</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Qué método utilizaste?</li> <li>• ¿Qué otros métodos te has planteado emplear?</li> <li>• ¿Cuál de tus métodos fue el mejor? ¿Por qué?</li> <li>• ¿Qué método fue el más rápido?</li> <li>• ¿Dónde habías visto un problema similar?</li> <li>• ¿Qué métodos utilizaste la última vez? ¿Habrían funcionado aquí?</li> <li>• ¿Qué estrategias útiles has aprendido para la próxima vez?</li> </ul>

## 7 Actividades de evaluación y ejemplos de respuestas para los conceptos

### Interpretar un gráfico distancia-tiempo

Cada mañana, Jane camina por una carretera recta desde su casa hasta una parada de autobús que está a una distancia de 160 metros. El gráfico muestra su recorrido en un día en concreto.

- Describe lo que pudo haber sucedido.  
Deberías incluir detalles como la velocidad de la marcha.



Respuesta de Jodie

Jane walked along a road for 100 metres instead of walking another 30 metres she took a short cut down an alleyway which took her 20 minutes. She walked very quickly then she caught the bus to her college which took about 50 minutes.

Respuesta de Maxine

when she get out she starts walking fast to the bus stop then she slows down then she picks up the speed again and then the speed goes ~~constant~~ constant.

## Cambios porcentuales

1. María ve un vestido que está rebajado de precio. Normalmente, el vestido cuesta 56,99 euros.

La etiqueta dice que hay un 45% de descuento.

Quiere usar la calculadora para saber cuánto va a costar el vestido.

No tiene un botón para calcular el porcentaje.

¿Qué teclas de su calculadora debe pulsar?

Anota las teclas en el orden correcto.

(No hace falta que hagas el cálculo).



2. Durante las rebajas, los precios de una tienda se redujeron en un 20%. Después de las rebajas, se incrementaron en un 25%.  
¿Cuál fue el efecto global sobre los precios de la tienda?  
Explica cómo lo sabes.

Respuesta de George

①  $56.99 - 0.45$   
② Prices went up 5%  
I know this because  $25\% - 20\% = 5\%$ .


Respuesta de Jurgén

1.  $56.99 \div 100 \times 45 =$   
 ~~$56.99 - 45 =$~~   
 $56.99 - 56.99 \div 100 \times 45 =$   
2.  $\$56.99 = 100\%$   
 $1\% = 56.99 \div 100 = 0.5699$   
 $20\% = 0.5699 \times 20 = 11.398$   
 $25\% = 0.5699 \times 25 = 14.2475$   
Difference = 2.8495  
\$2.85

## AMPLIACIÓN

Respuesta de Emily


**Photograph**



16 cm

10 cm

**Poster**



25 cm

A photograph is enlarged to make a poster.  
 The photograph is 10 cm wide and 16 cm high.  
 The poster is 25 cm wide.  
 How high is the poster?

$16 + 15 = 31$

---

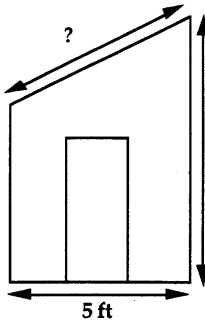
The building is 30 cm tall on the poster.  
 How tall is it on the photograph?

$30 - 15 = 15$

Respuesta de Paul

4. Simon is drawing a scale diagram of his garden shed.  
 8 centimetres on his drawing represents 5 feet in real life.

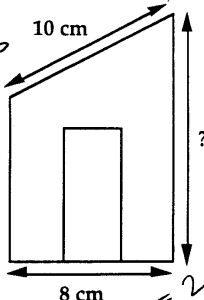
**Real shed**



5 ft

8 ft

**Simon's drawing**



8 cm

10 cm

$8 = 5$   
 $4 = 2.5$   
 $2 = 1.25$   
 $5 = 2.5$   
 $2.5 = 1.25$

$5 = 2.5$   
 $2.5 = 1.25$   
 $4 \text{ cen} = 2 \text{ cen}$

(a) What is the height of the shed on Simon's drawing?

$1.25 + 1.25 + 1.25 + 1.25 = 5$

(b) What is the length of the roof on the real shed?

## Interpretar el álgebra

Respuesta de Britney

1. A cake costs  $c$  cents. A sandwich costs  $s$  cents.

I buy 3 cakes and 4 sandwiches.

What does  $3c + 4s$  stand for?

..... 3 cakes and 4 sandwiches .....

2. There are ten times as many students as there are teachers in the college.

If  $s$  = the number of students in the college

$t$  = the number of teachers in the college

Write down an equation connecting  $s$  and  $t$ .

.....  $t = 10s$  .....

3. There are four times as many men as there are women on a course.

If  $x$  = the number of men on the course

$y$  = the number of women on the course

Write down an equation connecting  $x$  and  $y$ .

.....  $y = 4x$  .....

4. Write these expressions more simply, where you can:

a)  $a + a + a$  .....  $a^3$   ~~$a^3$~~

b)  $a \times a \times a$  .....  $a^3$   ~~$a^3$~~   ~~$a^3$~~

c)  $a + a + b$  .....  $a^2 + b$

d)  $a \times a \times b$  .....  $a^2 \times b$

e)  $a + a \times b$  .....  $a^2 \times b$

f)  $a + a + b + a + b$  .....  $a^3 + b^2$

g)  $3a \times 4b$  .....  $12ab$

h)  $3a + 4b$  .....  $7ab$

If it is impossible to write the expression more simply, write NO

## 8 Ideas equivocadas y errores: resultados de la investigación

**El aprendizaje es más eficaz cuando se identifican, abordan y comentan explícitamente las ideas equivocadas habituales durante la actividad docente.**

Tenemos que aceptar que los alumnos harán algunas generalizaciones que no son correctas y que muchas de estas ideas erróneas permanecen ocultas a menos que el profesor haga un esfuerzo especial por descubrirlas.

Uno de los hallazgos más importantes de la investigación en didáctica de las Matemáticas ha sido que todos los alumnos "inventan" constantemente reglas para explicar los patrones que ven a su alrededor. Por ejemplo, es bien sabido que muchos alumnos asimilan con bastante rapidez la "regla" de que para multiplicar por diez se añade un cero. Por consiguiente, a menudo, los alumnos "sobregeneralizan" sus reglas y las aplican a situaciones donde no funcionan. En el caso de la multiplicación por diez, la aplican a los decimales (por ejemplo,  $2,3 \times 10 = 2,30$ ). Del mismo modo, los alumnos pueden decidir que la multiplicación siempre genera un número más grande mientras que la división lo hace más pequeño, y luego elegir erróneamente multiplicar o dividir de acuerdo a su percepción de si los números tienen que hacerse más grandes o más pequeños.

Sin embargo, el reto de superar de este tipo de ideas erróneas supone un dilema para el profesor. Cuando se enseña la multiplicación de números enteros por diez, a fin de ofrecer a los alumnos ejemplos en los que la adición de un cero no funciona, sería necesario alejarse mucho del tema original, lo que puede suponer la introducción de conceptos matemáticas que, de momento, escapan a la capacidad de comprensión del alumno.

Surge una dificultad similar en la enseñanza de nuevos procedimientos, donde el enfoque más común es, primero, aplicar el procedimiento a ejemplos sencillos y, más tarde, a ejemplos más complejos. Esto puede ser contraproducente, ya que, a menudo, los alumnos resuelven los ejemplos sencillos de manera intuitiva sin saber cómo los han resuelto, y este tipo de métodos no puede utilizar con ejemplos más complejos. Así, por ejemplo, al enseñar a los alumnos los métodos para resolver ecuaciones, puede ser mejor comenzar con ejemplos que no puedan resolverse mediante métodos intuitivos, como probar resultados al azar o usar el método de "ensayo y error".

El modelo que consiste en empezar por ejemplos sencillos para pasar a otros más complejos también puede llevar a la aparición de ideas erróneas. Por ejemplo, la enseñanza de la resta de decenas y unidades a partir de ejemplos donde no se requiere la descomposición o el porte puede reforzar la idea de que siempre se resta el dígito más pequeño al más grande, lo que lleva a errores posteriores como  $43 - 28 = 25$ .

Parece imposible enseñar de manera que se evite que los alumnos creen ideas erróneas (lo que se llama en ocasiones "comunicación sin fallos"). Tal vez tengamos que aceptar que los alumnos harán algunas generalizaciones que no son correctas y que muchos de estos conceptos erróneos permanecerán ocultos a menos que el profesor haga un esfuerzo especial por descubrirlos. Se necesita un estilo de enseñanza que identifique y comente constantemente los conceptos erróneos y reduzca así su alcance. Esto quizá sea posible, ya que muchas investigaciones de los últimos veinte años han demostrado que los alumnos comparten la gran mayoría de los conceptos erróneos.

En el Proyecto de Enseñanza de diagnóstico, realizado en el Centro Shell para la Educación Matemática de la Universidad de Nottingham, se diseñaron paquetes didácticos para suscitar y abordar los conceptos erróneos de los alumnos durante las clases. Llegaron a dos importantes conclusiones. La primera fue que abordar las ideas equivocadas durante la actividad docente mejora el rendimiento y la retención a largo plazo de los conceptos y las capacidades de tipo matemático. Llamar la atención sobre un concepto erróneo antes de dar los ejemplos fue menos eficaz que dejar que los alumnos cayeran en la "trampa" y luego comentarlo.

La otra conclusión principal fue que la intensidad y el grado de compromiso con la tarea que los alumnos mostraron en los comentarios de grupo influyeron mucho más en su aprendizaje que la cantidad de tiempo dedicada a la tarea. A pesar de que los debates intensivos supusieron gastar mucho más tiempo en aspectos menores (aunque importantes), hubo un nivel general de retención a largo plazo mucho más alto que en las clases que cubren un terreno más amplio de manera superficial, pero en el mismo tiempo.

*Askew, M; Wiliam, D. (1995) Recent Research in Mathematics Education 5-16, Office for Standards in Education, HMSO, London.*



## 9 Plan didáctico para una sesión de evaluación formativa

Las siguientes sugerencias describen un posible enfoque para una sesión de evaluación formativa orientada a la resolución de problemas. En primer lugar, los alumnos tienen la oportunidad de abordar un problema sin ayuda. Esto brinda la oportunidad de evaluar su razonamiento e identificar a los alumnos que necesitan ayuda. A continuación tiene lugar una sesión formativa en la que colaboran, reflexionan sobre su trabajo y tratan de mejorarlo.

### Antes de la sesión 20 minutos

Antes de la sesión, tal vez al final de una sesión anterior, pide a los alumnos que intenten por su cuenta una de las tareas de *evaluación*: *Contar árboles*, *Gatos y gatitos* o *Cámaras de seguridad*. Los alumnos pueden necesitar calculadoras, lápices, reglas y papel cuadriculado.

*El objetivo es ver en qué medida eres capaz de hacer frente a un problema sin mi ayuda.*

- *No te diré qué partes de las matemáticas debes utilizar.*
- *Hay muchas maneras de abordar el problema. Tú eliges.*
- *Puede haber más de una "respuesta correcta".*

*No te preocupes si no comprendes o no haces todo, porque tengo previsto dar una sesión sobre este tema en los próximos días.*

Asegúrate de que los alumnos están familiarizados con el contexto del problema.

**Contar los árboles** *¿Alguien sabe lo que es una plantación de árboles?*

*¿En qué se diferencia una plantación de un bosque natural?*

*La plantación se compone de árboles viejos y jóvenes.*

*¿En qué podría diferenciarse la disposición de los árboles en una plantación de la de un bosque natural?*

**Gatos y gatitos**

*Este póster ha sido realizado por una asociación protectora de gatos que anima a que la gente esterilice a sus gatos para que no puedan tener gatitos. La actividad trata sobre lo que sucede si no tienes a tu gato/a esterilizado/a y sobre si la afirmación del póster es correcta.*

*¿Es realista que una gata tenga 2000 descendientes en 18 meses?*

*Se te dan algunos datos sobre los gatos y los gatitos que te ayudarán a decidir.*

**Cámaras de seguridad** *¿Alguna vez has visto una cámara de seguridad en una tienda o en un autobús? ¿Qué aspecto tenía?*

*Algunas pueden no parecer cámaras en absoluto, sino más bien pequeños hemisferios.*

*Pueden ser fijas, aunque muchos son giratorias. Las cámaras de este problema pueden girar 360° hacia la derecha. El dibujo muestra la vista en planta de una tienda.*

*Esto significa que estamos mirando la tienda desde arriba.*

*Los círculos pequeños representan a personas de pie en la tienda.*

*Acuérdate de mostrar tu trabajo para que pueda entender lo que estás haciendo y por qué.*

Recoge sus trabajos y dales un feedback constructivo y cualitativo sobre ellos. Este feedback debe centrarse en lograr que los alumnos piensen y razonen, en el marco de un proceso clave. ¡No les pongas calificaciones, puntuaciones ni niveles! Debajo de su trabajo, debes escribir únicamente preguntas. Centra el feedback en aspectos como:

- *Representar:*  
¿Se te ocurre una forma diferente de abordar su problema?  
¿Qué tipo de diagrama podría ser útil?  
¿Qué hipótesis has elaborado?
- *Razonar:*  
¿Cómo has obtenido este resultado?  
¿Has revisado tus cálculos?  
¿Qué pasaría si...?
- *Interpretar:*  
¿Cómo puedes probar la exactitud de tu cálculo?  
¿Qué otro ejemplo podías haber elegido?
- *Comunicar:*  
En este caso, me resulta difícil seguir tu razonamiento.  
¿Podrías presentar tu razonamiento de manera que otra persona pueda seguir cada paso?

Trata de identificar individualmente a los alumnos que hayan tenido dificultades y que puedan necesitar apoyo. Identifica también a los alumnos que hayan tenido éxito. Estos pueden necesitar una actividad de extensión que les suponga un reto mayor.

### Recursos necesarios para la sesión

Necesitarás los siguientes recursos:

- Una copia de la hoja de problemas por alumno.
- Minipizarras
- Hojas grandes de papel para la elaboración de pósters; rotuladores.
- Calculadoras y reglas.

#### *Contar árboles*

- Copias grandes de repuesto de la imagen de los árboles para que los grupos trabajen en grupo.

#### *Gatos y gatitos*

- Ten a mano papel cuadriculado o milimetrado (por si te lo piden)

#### *Cámara de seguridad.*

- Copias de repuesto del plano de la tienda para los borradores.
- Papel cuadriculado (por si te lo piden)

### Volver a plantear el problema a la clase 5 minutos

Comienza la sesión volviendo a plantear el problema brevemente:

*¿Recordáis el problema que os pedí que intentarais la última vez?  
He echado un vistazo a vuestros trabajos y he escrito comentarios en la parte inferior.  
Hoy vamos a colaborar para intentar mejorar estos primeros intentos.  
En primer lugar, por vuestra cuenta, leed con detenimiento las preguntas que he planteado sobre vuestro trabajo. Utilizad vuestras minipizarras para anotar las respuestas a estas preguntas.*

Es útil pedir a los alumnos que escriban sus ideas en una hoja grande de papel o en una minipizarra con un rotulador. Esto te ayudará a supervisar su trabajo y también ayudará a los alumnos a compartir sus ideas más adelante en la sesión.

### **Los alumnos trabajan solos en respuesta a tus comentarios 5 minutos**

Da a los alumnos tiempo para reflexionar sobre tus comentarios y escribir sus respuestas.

### **Los alumnos trabajan por parejas para mejorar sus soluciones 10 minutos**

Pide a los alumnos que trabajen ahora por parejas o tríos. Reparte una hoja de papel de tamaño A3 (al menos) y un rotulador a cada grupo.

*Ahora quiero que compartas tu trabajo con un compañero.  
Por turnos, explicad cómo realizasteis la tarea y cómo pensáis ahora que podría mejorarse.*

*Ahora quiero que cada pareja colabore comparando sus ideas y el feedback que he dado.  
Quiero que, juntos, intentéis dar una respuesta al problema que sea mejor que la que cada uno había ofrecido por separado.*

Da una vuelta por el aula, escucha, evalúa su razonamiento e intervén haciendo preguntas estratégicas. Consulta una copia de los pasos de progresión para el problema en cuestión y decide qué preguntas serían más apropiadas para hacer avanzar su pensamiento de forma que obtengan mejores resultados. Plantea preguntas estratégicas como:

*¿Qué se sabe y qué se desconoce?  
¿Qué se os pide que averigüéis?  
¿Cómo podemos simplificar este problema?  
¿Qué hipótesis has elaborado?*

### **Los alumnos comparten sus planteamientos con la clase 15 minutos**

Pide a los alumnos que presenten sus ideas y planteamientos a la clase. Concéntrate en sus métodos más que en sus respuestas. A medida que respondan, sigue los pasos de progresión para evaluar sus respuestas. En concreto, céntrate en la calidad del razonamiento y la comunicación.

*"Decidimos contar los diferentes tipos de árboles de cada lado y luego multiplicar estas cantidades."  
"Dibujamos una línea de tiempo en la parte superior del papel y luego las gatas debajo para poner cuándo parieron."*

A medida que los alumnos presenten sus ideas, pide a otros alumnos que comenten sobre:

- Representar: ¿Eligieron un buen método?
- Analizar: ¿Es correcto el razonamiento? ¿Son los cálculos exactos?
- Interpretar: ¿Son lógicas las conclusiones?
- Comunicación: ¿El razonamiento fue fácil de entender y seguir?

### **Los alumnos continúan con el problema / o una extensión del problema 20 minutos**

Anima a que los alumnos retomen el problema y sigan trabajando en él utilizando algunas de las ideas que se han compartido. Si ya han obtenido una buena solución, pídeles que encuentren un método alternativo, un razonamiento más convincente o que exploren una extensión.

**Contar árboles**

*Si ahora te enseñase un bote muy grande de caramelos, ¿cómo podrías calcular la fracción de caramelos rojos? Anota tu método. ¿Puedes usar lo que aprendiste en la actividad "Contar árboles"?*

**Gatos y gatitos**

*¿Puedes encontrar una manera más sencilla y elegante de presentar tus cálculos para el problema "Gatos y gatitos"? ¿Puedes utilizar algún tipo de diagrama?*

**Cámara de seguridad**

*Hay varios lugares donde la cámara puede colocarse que son tan buenos como el que has encontrado. Trata de encontrar todas las soluciones. ¿Puedes convencerme de que estas son todas las soluciones posibles? ¿Puedes explicar por qué todas dan la misma cobertura de la tienda?*

Recoge ejemplos de trabajo de los alumnos para la subsiguiente puesta en común. Trata de evaluar cuánto han aprendido los alumnos de la puesta en común.

## 10 Efecto del feedback en el aprendizaje de los alumnos

Lee los siguientes dos extractos de Black y Wiliam (1998) y responde a las siguientes preguntas:

### Los peligros de dar notas, niveles, recompensas y clasificaciones

"Cuando la dinámica de la clase gira en torno a recompensas, "estrellas doradas", calificaciones o clasificaciones respecto a los demás miembros del grupo, los alumnos se centran en conseguir las mejores notas más que en sus necesidades de aprendizaje, que es lo que deben reflejar esas notas. Según los estudios realizados, una de las consecuencias es que, si pueden elegir, los alumnos evitan las tareas difíciles. También dedican tiempo y energía en busca de pistas sobre la "respuesta correcta". Muchos son reacios a hacer preguntas por miedo al fracaso. A los alumnos que tienen dificultades y resultados bajos, se les hace creer que carecen de capacidad, y esta creencia les lleva a atribuir sus dificultades a un defecto propio que no pueden hacer mucho por solucionar. Así que se rinden, evitan invertir esfuerzos en un aprendizaje que solo podría conducir a la decepción, y tratan de construir su autoestima de otras maneras. Mientras que los alumnos con buenos resultados pueden prosperar en el marco de esta dinámica, el resultado general es que aumentan la frecuencia y el grado del fracaso escolar."

- ¿Qué implicaciones tiene esto para tu práctica docente?
- ¿Qué pasaría si dejaras de poner notas o niveles a los trabajos de los alumnos?
- ¿Por qué hay tantos profesores que se resisten a realizar este cambio?

### Ventajas de aportar un feedback claro, específico y centrado en los contenidos

"Lo que se necesita es una búsqueda del éxito basada en la creencia de que todos podemos conseguirlo. Aquí, la evaluación formativa puede ser un arma poderosa si se comunica de adecuadamente. Si bien puede ayudar a todos los alumnos, da resultados especialmente buenos con los que tienen un bajo rendimiento, ya que se centra en los problemas específicos de su trabajo. Además, propicia que todos comprendan con claridad lo que es erróneo al tiempo que les marca unos objetivos factibles para corregirlo. Los alumnos pueden aceptar ese tipo de mensajes y trabajar con ellos, siempre que no se vean empañados por insinuaciones acerca de su capacidad y competencia ni por comparaciones con los demás. En resumen, el mensaje puede expresarse como sigue:

El feedback para el alumno debería tratar sobre las cualidades específicas de su trabajo, con consejos sobre lo que puede hacer para mejorar, y debería evitar comparaciones con los demás alumnos".

- ¿Qué implicaciones tiene esto para su práctica docente?
- ¿Lleva necesariamente mucho más tiempo aportar este tipo de feedback?

*Black, P., & Wiliam, D. (1998). Inside the black box : raising standards through classroom assessment. London: King's College London School of Education 1998.*