Primas

HET LEREN VAN BEGRIPPEN DOOR ONDERZOEK

Hand-outs voor docenten

Inhoud

1 Observeren en visualiseren

Beschrijven en namaken van wat u ziet

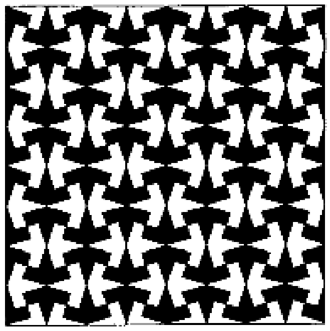
Toon de klas een poster of een voorwerp en vraag hen om zo precies mogelijk te beschrijven wat zij zien.

Zet twee leerlingen met de ruggen naar elkaar en geef één van hen een eenvoudig meetkundig ontwerp. Vraag die persoon het ontwerp te omschrijven zodat de tweede persoon het exact kan weergeven.

Alhambra patroon

Dit tegeltjespatroon vind je in het Alhambra paleis in Granada, Spanje.

- Hoe zou je dit patroon omschrijven aan iemand die het niet kan zien?
- Beschrijf hoe de individuele tegels misschien samengesteld zijn.



Visualiseren

Vraag leerlingen om hun ogen dicht te doen en zich een situatie voor te stellen waarin iets verandert. Vraag hen om te beschrijven wat ze 'zien'.

Kaasblokje

Stel dat je een blok kaas hebt en een mes. Stel je voor dat je een kleine hoek van de kaas afsnijdt. Welke vorm heeft de doorsnede?

Stel je voor dat je steeds meer parallelle plakjes van de kaas afsnijdt. Hoe verandert de vorm? Welke vormen komen er nog meer voor?
Ga door totdat er geen kaas meer over is!
Verander nu de hoek waaronder je de kaas snijdt...

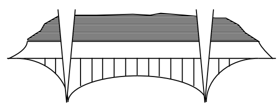
Op zoek naar structuur

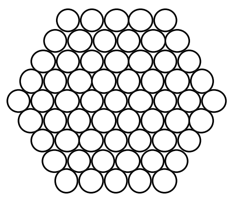
Geef leerlingen een probleem dat hen aanmoedigt om op zoek te gaan naar verschillende structuren binnen een context.
Vraag ze om hun structuren te gebruiken om generalisaties op te stellen.

In het getoonde voorbeeld, kan ze gevraagd worden:

- Op welke verschillende manieren kun je de kabels tellen?
- Kun je het diagram op verschillende manieren *zien*?
    - Kun je het zien als samengesteld uit parallellogrammen of uit driehoeken?
    - Kun je een driedimensionale vorm ontdekken?

Hangbrugkabels





Bij het maken van een kabel voor een hangbrug, worden vele draden verzameld in een zeskantige formatie en dan 'samengeperst'.
Dit diagram toont een 'maat 5' kabel samengesteld uit 61 draden.
Hoeveel draden zijn er nodig voor een maat 10 kabel?
Hoeveel voor een kabel van maat *n*?

De *Alhambra patroon*opdracht en de *Hangbrugkabel*opdracht komen beide uit Swan en Crust (1993) *Mathematics Programmes of Study, Inset for Key Stages 3 and 4*, National Curriculum Council, York.

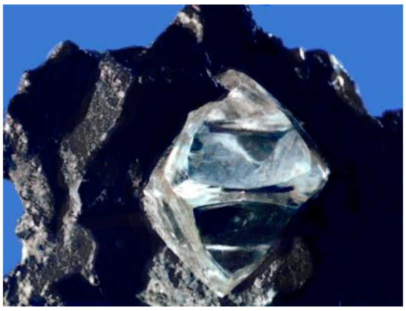
1 Observeren en visualiseren (vervolg)

Op zoek naar structuur

Vraag leerlingen om een structuur te tekenen of een model te maken van een gegeven driedimensionale vorm.

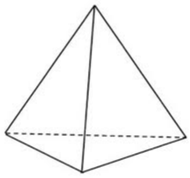
Ze kunnen bijvoorbeeld lucifers, boetseerklei en polyethyleen film gebruiken om een model te maken van deze kristalstructuur van een diamant.

Diamantkristal in een matrix

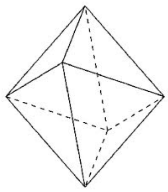


Bekijk dit plaatje van een diamant in zijn matrix rots.
Welke structuur lijkt het te hebben?

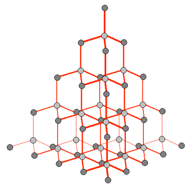
Regelmatig viervlak



Regelmatig achtvlak



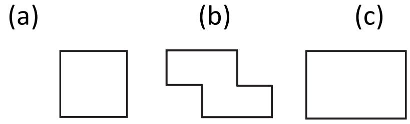
Koolstofverbinding in een diamant



2 Classificeren en definiëren

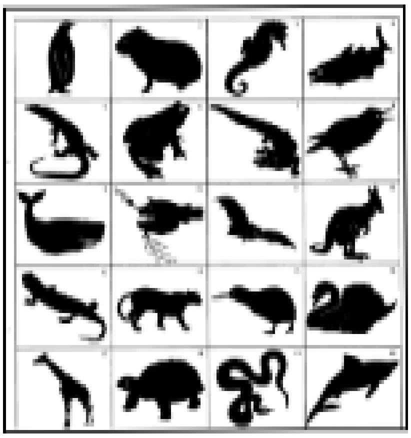
Overeenkomsten en verschillen

Toon leerlingen drie voorwerpen.
"Welke hoort er niet bij?"
"Beschrijf de kenmerken die twee wel hebben en de derde niet."
"Kies een ander voorwerp van de drie en verdedig het als de figuur die er niet tussen hoort."



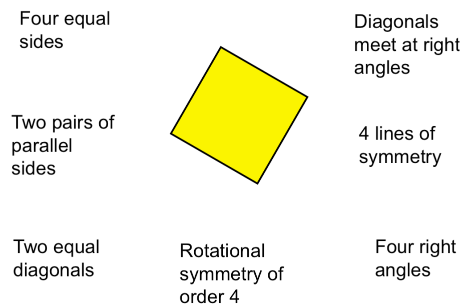
(a) $y = x^2\text{-}6x+8$
(b) $y = x^2\text{-}6x+9$
(c) $y = x^2\text{-}6x+10$

Laat leerlingen wat silhouetten van dieren zien.
"Kun je de dieren benoemen?"
"Knip de 20 kaarten uit en deel de dieren in groepen in."
"Schrijf de criteria op die je gebruikt hebt om de groepen vast te stellen."
"Laat je groepen aan een andere leerling zien. Kunnen zij jouw criteria voor het vaststellen van de groepen achterhalen?"

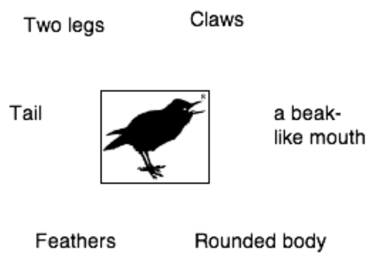


Eigenschappen en definities

Toon leerlingen een object.
"Bekijk dit object en schrijf al zijn eigenschappen op."
"Kun je met *één enkele* eigenschap dit object *definiëren*? Zo niet, welk ander object heeft ook die eigenschap?"
"Welke *tweetallen* eigenschappen leggen een definitie vast en welke tweetallen niet?"



"Kijk naar dit dier en schrijf al zijn kenmerken op."
"Is er één *enkel* kenmerk uniek voor deze vogel? Zo niet, welk ander object heeft dat kenmerk ook?"
"Welke *tweetallen* van kenmerken zouden de vogel uniek omschrijven? Welke tweetallen niet?"



2 Classificeren en definiëren (vervolg)

Het maken en testen van een definitie

Vraag leerlingen om de definitie van een veelhoek, of een ander wiskundig woord, op te schrijven.

“Wissel definities uit en probeer ze te verbeteren.”

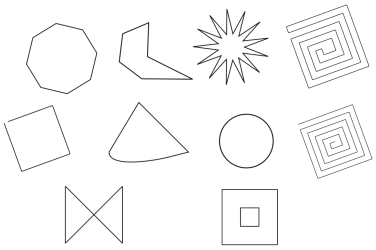
Toon leerlingen een verzameling objecten.
“Gebruik jouw definitie om de voorwerpen te sorteren.”
“Verbeter je definitie.”

Vraag leerlingen om een beschrijving van een vogel, of een ander dier of een plant, op te schrijven.

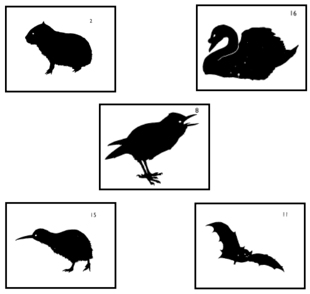
“Wissel beschrijvingen uit en probeer ze te verbeteren.”

Vraag de leerlingen om naar de silhouetten van een aantal dieren te kijken.
“Bedenk welke van deze dieren ‘vogel’ genoemd zouden kunnen worden, alleen aan de hand van jouw beschrijving."
“Verbeter je beschrijving.”

Welke van deze vormen is een polygoon volgens jouw definitie?



Welke hiervan is een vogel volgens jouw omschrijving?

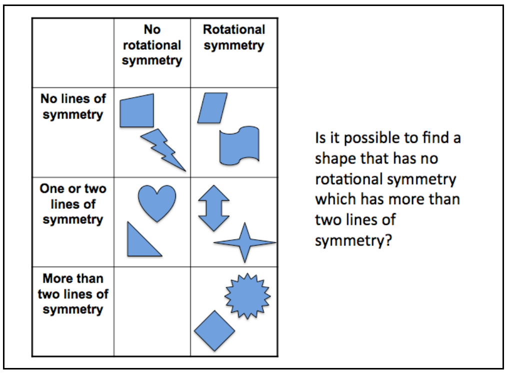


Classificeer met behulp van een matrix

Geef leerlingen een matrix om een verzameling van voorwerpen te ordenen.

“Maak je eigen objecten en voeg deze toe aan de tabel.”

“Probeer te verklaren waarom bepaalde vakken onmogelijk in te vullen zijn.”



(De silhouetten van dieren komen uit Nuffield-Chelsea Curriculum Trust, 1987).

3 Vertalen tussen representaties

Woorden en tabellen

Leerlingen wordt gevraagd aan de hand van een mondelinge omschrijving een tabel met waarden op te stellen. Omgekeerd: wanneer ze een tabel krijgen, wordt leerlingen gevraagd het verband in woorden te omschrijven.

Werktijden

Stel een tabel op om het volgende verband aan te tonen:

" Wanneer het aantal mensen dat aan het werk is wordt verdubbeld, halveert de tijd die nodig is om het af te ronden."

Aantal mensen	1	2	3	4	5	6
Benodigde tijd in uren						

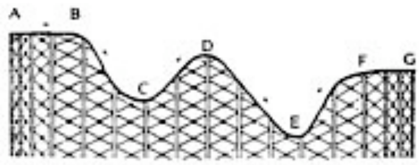
Afbeeldingen en grafieken

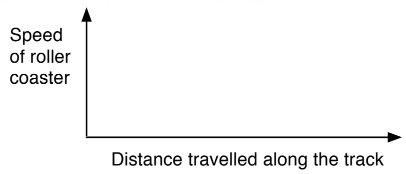
Leerlingen stellen zich naar aanleiding van een afbeelding van een situatie voor hoe de situatie zich in de loop van de tijd kan ontwikkelen en schetsen een grafiek.

Omgekeerd: Bij een grafiek wordt leerlingen gevraagd de bijbehorende afbeelding van een situatie te schetsen.

Achtbaan

Schets een grafiek waarbij de snelheid wordt uitgezet tegen de afgelegde afstand op de achtbaan.





Woorden en formules

Leerlingen wordt gevraagd een “denk aan een nummer” probleem algebraïsch weer te geven om daarmee uit te leggen waarom het werkt. Leerlingen verzinnen een algebraïsche identiteit en bedenken daar een “denk aan een nummer” probleem bij.

Denk aan een nummer

“Denk aan een nummer. Verdubbel het. Tel er zes bij op. Deel door 2. Haal het getal waar je eerst aan dacht er vanaf. Toon aan dat het antwoord altijd 3 is.”

Maak je eigen voorbeeld.

Tabellen en grafieken

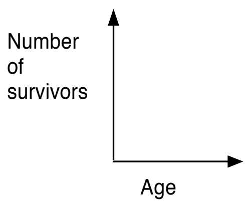
Leerlingen wordt gevraagd om een grafiek te schetsen vanuit een gegeven tabel, zonder de gegeven punten te 'plotten'.

Leerlingen bedenken een tabel die zou kunnen passen bij een gegeven globale grafiek.

Levensverwachting

Schets een grafiek die past bij de gegevens

Age (yrs)	Number of survivors	Age (yrs)	Number of survivors
0	1000	50	913
5	979	60	808
10	978	70	579
20	972	80	248
30	963	90	32
40	950	100	1



3 Vertalen tussen representaties (vervolg)

Tabellen en formules

Leerlingen zoeken naar een algemene regel in een gegeven tabel.

Leerlingen gebruiken deze regel om voorspellingen te maken.

Toernooien

De tabel toont het aantal wedstrijden (*m*) dat nodig is voor een competitie, waarbij elk team twee keer tegen elk ander team speelt, één keer thuis en één keer uit. Vind een formule die het verband weergeeft tussen het aantal teams (*n*) en het aantal wedstrijden (*m*).

Aantal teams (*n*)	2	3	4	5	6	7	8
Aantal wedstrijden (*m*)	2	6	12	20	30	42	56

Gebruik je formule om nieuwe vakken in de tabel te voorspellen. (Bijv. hoeveel wedstrijden zijn er nodig bij 20 teams?)

Formules en grafieken

Leerlingen zetten de punten in een assenstelsel (bijvoorbeeld bij een spreadsheet) en proberen welke functie op de gegevens past door middel van experimenteer- en verbetermethodes.

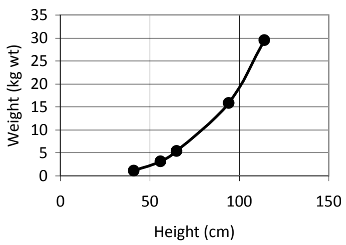
Het heen- en weer vertalen tussen grafiek en formule via proberen kan het begrip over de vormen van grafieken van verschillende functies versterken.

Pinguïns

Probeer een formule te vinden van de vorm $y = ax^n$ die past bij de grafiek die het verband weergeeft tussen de gemiddelde *lengte* en het *gewicht* van vijf verschillende soorten pinguïns.

Voorspel het gewicht van een nu uitgestorven pinguïn waarvan ze denken dat de lengte 150 cm was.

	Lengte (cm)	Gewicht (kg)
keizerspinguïn	114	29.48
koningspinguïn	94	15.88
geeloogpinguïn	65	5.44
Fjordlandpinguïn	56	3.18
Kleine blauwe pinguïn	41	1.13



Achtbaan en *levensverwachting* komen uit Swan (1985) *The Language of Functions and Graphs*, Shell Centre for Mathematical Education/Joint Matriculation Board. *Toernooien* is aangepast vanuit Swan (1983) *Problems with Patterns and Numbers,* Shell Centre for Mathematical Education/Joint Matriculation Board. Deze voorbeelden werden ook gebruikt in Swan en Crust (1993) *Mathematics Programmes of Study, Inset for Key Stages 3 and 4*, National Curriculum Council, York.

Primas

4 Representaties en het leggen van verbanden

Het koppelen van verschillende representaties

Elke groep leerlingen krijgt een setje kaarten. Ze worden gevraagd de kaarten te sorteren in setjes zodat elke set kaarten een gelijkwaardige betekenis heeft. Terwijl ze dit doen, moeten ze uitleggen hoe ze weten dat de kaarten gelijkwaardig zijn. Ze stellen zelf ook de kaarten samen die missen. De kaarten zijn zo ontworpen dat ze leerlingen dwingen om onderscheid te maken tussen representaties die snel met elkaar verward worden (misconcepties).

E1	$\dfrac{n+6}{2}$	**E2**	$3n^2$
E3	$2n+12$	**E4**	$2n+6$
E5	$2(n+3)$	**E6**	$\dfrac{n}{2}+6$
E7	$(3n)^2$	**E8**	$(n+6)^2$
E9	$n^2+12n+36$	**E10**	$3+\dfrac{n}{2}$
E11	n^2+6	**E12**	n^2+6^2
E13	……..	**E14**	………

Kaartenset B: Omschrijvingen met woorden

W1	Vermenigvuldig *n* met 2, tel er dan zes bij op	**W2**	Vermenigvuldig *n* met drie, kwadrateer dan het antwoord
W3	Tel zes op bij *n*, vermenig-vuldig dan met 2	**W4**	Tel zes op bij *n,* deel dan door twee
W5	Tel drie op bij *n*, vermenig-vuldig dan met 2	**W6**	Tel zes op bij *n*, kwadrateer dan het antwoord
W7	Vermenigvuldig *n* met 2, tel er dan twaalf bij op	**W8**	Deel *n* door twee, tel er dan zes bij op
W9	Kwadrateer *n*, tel er dan zes bij op	**W10**	Kwadrateer *n*, vermenig-vuldig dan met negen
W11		**W12**	
W13		**W14**	

Primas

Kaartenset C: Tabellen

T1

n	1	2	3	4
Ans	14	16	18	20

T2

n	1	2	3	4
Ans			81	144

T3

n	1	2	3	4
Ans		10	15	22

T4

n	1	2	3	4
Ans	3		27	48

T5

n	1	2	3	4
Ans			81	100

T6

n	1	2	3	4
Ans		10	12	14

T7

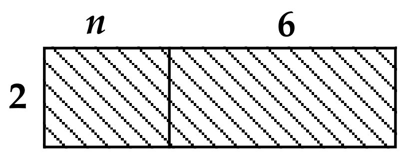
n	1	2	3	4
Ans		4		5

T8

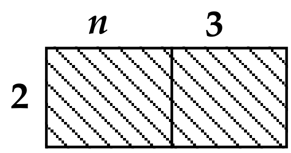
n	1	2	3	4
Ans	6.5	7	7.5	8

Kaartenset D: Oppervlaktes

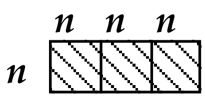
A1



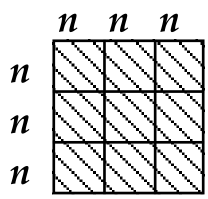
A2



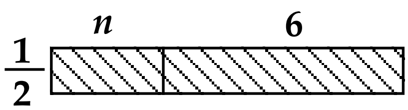
A3



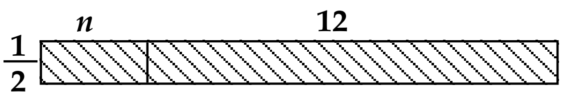
A4



A5



A6



Swan, M. (2008), *A designer speaks: Designing a Multiple Representation Learning Experience in Secondary Algebra*. Educational Designer: Journal of the International Society for Design and Development in Education, 1(1), artikel 3.

5 Schatten

Werk samen aan het volgende probleem.

Bomen

Hoeveel bomen zijn er ongeveer per dag nodig om alle kranten in jouw land te kunnen leveren?

Probeer een redelijke schatting te maken, gebaseerd op feiten die je al kent of die je kunt opzoeken.

Om het probleem te kunnen oplossen, heb je veronderstellingen moeten maken die zijn gekoppeld aan een hele reeks van gedachtegangen.

Beschrijf een aantal schattingsproblemen die geschikt zouden zijn voor je eigen klas.

6 Meten en kwantificeren

Welke meeteenheden komen uw leerlingen tegen in het dagelijks leven?

Maak een lijst:

Mogelijke activiteiten voor leerlingen:

Vergelijken van meeteenheden

Geef leerlingen twee manieren om iets op te meten. Vraag leerlingen om ze te vergelijken en te vertellen waarom de een beter is dan de ander.

Het meten van de helling

Put these staircases in order of steepness.

Is **"Height of step - length of step"** a good measure of steepness?

Why is **"Height of step ÷ length of step"** better?

Meeteenheden definiëren

Vraag leerlingen om een meeteenheid op te stellen voor een alledaags fenomeen en gebruik die vervolgens in verschillende situaties.

Hoe zou u de volgende fenomenen 'meten':

- de "compactheid" van een meetkundige vorm?
- de "plakkerigheid" van plakband?
- de "bochtigheid" van een rivier?
- de "moeilijkheid" van een bocht in de weg?
- de "fitheid" van een persoon?

6 Meten en kwantificeren (vervolg)

Het meten van compactheid

De ontoereikendheid in het gebruiken van *oppervlakte ÷ omtrek* om de compactheid te meten wordt duidelijk door twee gelijke figuren verschillende afmetingen te vergelijken. Denk bijvoorbeeld aan een vierkant met een zijde van twee eenheden en een vierkant met een zijde van drie eenheden. We zouden zeggen dat beide even compact zijn aangezien ze beide een vierkant zijn, maar wanneer we de verhouding *oppervlakte ÷ omtrek* gebruiken zou hun maat verschillend zijn: 4/8 = 0,5 en 9/12 = 0,75.

We zouden deze maat kunnen aanpassen door het dimensieloos te maken met de formule $C = \frac{a}{p^2}$, waarbij *a* = oppervlakte en *p* = omtrek. Dit zou dan de waarde 1/16 geven voor beide vierkanten. Deze verhouding heeft een maximumwaarde wanneer de vorm cirkelvormig is. In dit geval, $C = \frac{\pi r^2}{(2\pi r)^2} = \frac{1}{4\pi}$.

Om te zorgen dat de maat tussen 0 en 1 ligt zouden we daarvoor de maat kunnen schalen door te vermenigvuldigen met 4π. Dit wordt toegepast door geografen en wordt de **Rondlopende verhouding** genoemd (Selkirk, 1982):

Rondlopende verhouding

$$C_1 = \frac{4\pi a}{p^2} \qquad \text{met } a = \text{oppervlakte (area); } p = \text{omtrek (perimeter) van de vorm}$$

Eén punt van kritiek op deze maat is dat het lastig is om *p* te bepalen en te berekenen wanneer men hele grote, onregelmatige begrenzingen zoals landen of stroomgebieden wil meten. Andere mogelijke metingen, ook genoemd door Selkirk, zijn:

Vorm verhouding

$$C_2 = \frac{4a}{\pi l^2} \qquad \text{met } a = \text{oppervlakte (area); } l = \text{lengte van het lijnstuk dat de twee punten met de grootste afstand verbindt}$$

Compactheid verhouding

$$C_3 = \frac{a}{\pi R^2} \qquad \text{met } a = \text{oppervlakte (area); } R = \text{straal (radius) van de kleinste omgeschreven cirkel van de vorm}$$

Straal verhouding

$$C_4 = \frac{r}{R} \qquad \text{met r = straal van de grootste cirkel die in de vorm past en}$$

$$R = \text{straal van de kleinste cirkel die de vorm omvat}$$

7 Het kritisch beoordelen van beweringen

Elke groep leerlingen krijgt een setje kaarten met beweringen. Meestal hebben deze beweringen op de een of andere manier iets met elkaar te maken. De leerlingen moeten beslissen of ze altijd, soms of nooit waar zijn.

- Wanneer ze denken dat het *altijd* of *nooit* waar is, dan moeten zij proberen uit te leggen hoe ze dat zeker kunnen weten.
- Als ze denken dat het *soms* waar is, dan moeten ze precies beschrijven wanneer het waar is en wanneer niet.

Loonsverhoging Max krijgt een loonsverhoging van 30% Jim krijgt een loonsverhoging van 25% Dus Max ontvangt een grotere loonsverhoging dan Jim.	**Uitverkoop** In een uitverkoop was de prijs met 25% verlaagd. Na de uitverkoop werd elke prijs weer verhoogd met 25% Dus de prijzen waren weer gelijk aan vroeger.
Oppervlakte en omtrek Wanneer je een stuk van een meetkundige figuur afknipt, maak je de oppervlakte en de omtrek kleiner.	**Rechte hoeken** Een vijfhoek heeft minder rechte hoeken dan een rechthoek
Verjaardagen In een klas met 10 leerlingen is de kans dat 2 leerlingen op dezelfde dag van de week geboren zijn gelijk aan 1.	**Loterij** In een loterij hebben de zes nummers 3,12, 26, 37, 44, 45 meer kans om getrokken te worden dan de zes nummers 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Grotere breuken Wanneer je in de teller en de noemer van een breuk hetzelfde getal optelt, wordt de uitkomst van de breuk groter.	**Kleinere breuken** Wanneer je teller en noemer van een breuk door hetzelfde getal deelt, wordt de uitkomst van de breuk kleiner.
Wortels De wortel van een getal is minder dan of gelijk aan het getal.	**Reeksen** Als de termen van een oneindige rij getallen naar nul naderen, dan is de som van die rij getallen nul.

8 Experimenteren en controleren van variabelen

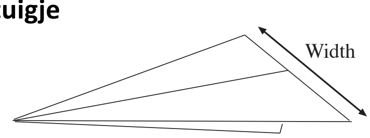
Het opstellen van een eerlijke test

Leerlingen worden gevraagd om een experiment op te zetten en uit te voeren om het verband tussen twee of meer variabelen te vinden. Terwijl ze dit doen, moeten ze bedenken hoe ze eventueel andere variabelen onder controle houden .

Één klontje of twee?

Het duurt even voordat suikerklontjes oplossen in koffie. Welke factoren kunnen het tempo van het oplossen beïnvloeden? Stel een experiment op en voer het uit om het verband tussen de snelheid van oplossen en één van deze andere factoren te onderzoeken.

Papieren vliegtuigje



Alice wil weten hoe ze een papieren vliegtuigje kan maken dat een hele tijd blijft vliegen. Welke factoren zouden de vliegtijd wellicht kunnen beïnvloeden?

Zet een experiment op en voer het uit om het verband tussen de vliegtijd en één van deze factoren te onderzoeken.

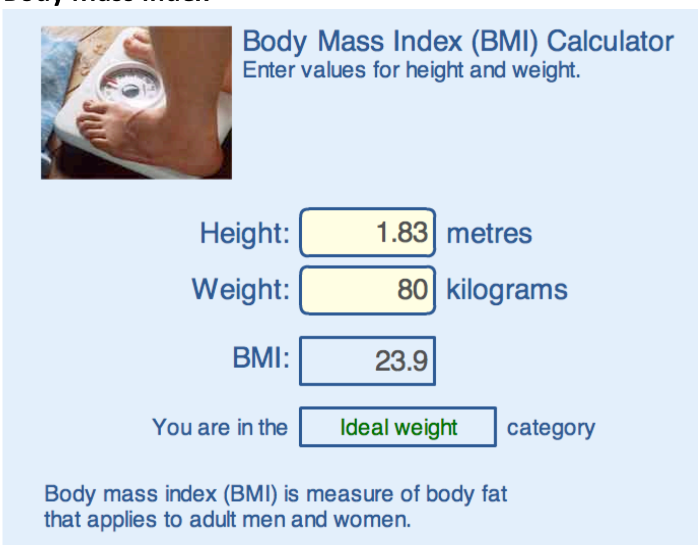
Ontdekken hoe een rekenmachine werkt

Leerlingen krijgen een spreadsheet of een online rekenmachine om te onderzoeken. De uitdaging is om te ontdekken hoe de rekenmachine werkt.

De rekenmachine die hier getoond wordt, wordt door volwassen op websites gebruikt om er achter te komen of ze overgewicht hebben. Leerlingen voeren waarden in voor lengte en gewicht en verzamelen gegevens om zo te ontdekken hoe de rekenmachine de BMI berekent.

Er zijn nog vele andere voorbeelden online te vinden.

Body Mass Index



Probeer uit te vinden hoe de rekenmachine de body mass index uitrekent met behulp van lengte en gewicht van een persoon.

9 Communiceren

Het geven van uitleg

Leerlingen wordt gevraagd om een alledaags fenomeen zo duidelijk en zo zorgvuldig mogelijk uit te leggen. Daarbij kunnen visuele representaties wellicht helpen als toelichting.

Probeer een duidelijke en overtuigende uitleg te geven voor elk van de volgende uitspraken:

- Stoelen met vier poten wiebelen vaak, maar driepotige stoelen nooit. Waarom is dat zo?
- Een vraag van een vierjarig meisje ’s avonds in de auto: ‘Waarom rijdt de maan met ons mee?’
- Je loopt in het donker over straat naar een lantaarnpaal. Jouw schaduw volgt je. Je loopt onder de lamp door en wandelt verder. Wat gebeurt er met jouw schaduw? Beweegt je schaduw steeds even snel? Beweegt jouw schaduw sneller of langzamer dan jij? Leg uit.
- Vrachtauto’s die rechtsaf slaan zijn een groter gevaar voor fietsers dan personenauto's. Leg uit waarom.
- ‘Wanneer ik mijn linkerhand beweeg, beweegt mijn spiegelbeeld zijn rechterhand.’ De spiegel lijkt links en rechts om te draaien. Het lijkt echter niet boven en onder om te draaien. Kun je dit verklaren?
- De koppen van moeren en bouten zijn meestal zeshoekig van vorm. Waarom is dat zo? Waarom gebruiken ze geen andere vorm?
- Als je papier vouwt papier krijg je altijd rechte vouwlijnen? Waarom kun je geen gekromde lijnen krijgen bij vouwen?